

## Лекция 1

### 1.1 Основные понятия сопротивления материалов

*Сопротивление материалов* — наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений.

Сопротивление материалов — это азбука расчетов на прочность. Имеется много более сложных дисциплин, также изучающих прочность: теория упругости, теория пластичности, теория ползучести, теория оболочек, механика разрушения и др.

Если теоретическая механика рассматривает абсолютно, твердые тела, то в сопротивлении материалов учитывается, что элементы конструкции под действием внешних сил изменяют свою форму и размеры т.е. деформируются.

Прочность – способность элемента конструкции сопротивляться внешним воздействиям не разрушаясь.

*Жесткость* — это способность конструкции сохранять исходную форму в заданных (обычно весьма малых) пределах.

*Устойчивость* — это способность конструкции сохранять первоначальную форму равновесия.

*Деформация* – изменение размеров и формы элемента под действием нагрузки.

Виды деформации:

1 Упругие – исчезают после снятия нагрузки.

2 Пластические (остаточные) Частично остаются после снятия нагрузки. В правильно спроектированных конструкциях пластические деформации не допустимы.

### 1.2 Основные допущения сопротивления материалов

При построении теории расчета невозможно отразить всё многообразие свойств реальных материалов, поэтому приходится делать целый ряд допущений, упрощающих расчеты.

**1е допущение** при расчете всегда рассматривается **идеализированное тело, которое считается сплошным (без пустот) • однородным.** Это означает, что свойства материала не зависят от формы и размеров тела и одинаковы во всех его точках. Например, малоуглеродистая сталь, состоящая из кристаллов феррита, сетки третичного цементита и перлитовых включений, идеализируется и рассматривается сплошной и однородной. Допущение справедливо даже для такого неоднородного материала, как бетон, состоящего из щебня, связанного цементным раствором, так как размеры отдельных частиц материала невелики по сравнению с размерами поперечных сечений элементов.

**2е допущение** **Упругие свойства материала во всех направлениях одинаковы, т. е. материал тела обладает упругой изотропией.** Это допущение используется при решении

большинства задач сопротивления материалов. Однако для некоторых материалов, например, для дерева, свойства которого в направлениях вдоль и поперек волокон различны, необходимо учитывать анизотропию, поэтому пользоваться этим допущением нельзя

**3е допущение** Тело считается абсолютно упругим. Это значит, что после устранения причин, вызывающих деформацию, оно полностью восстанавливает свою первоначальную форму и размеры. Это допущение справедливо лишь при напряжениях, не превышающих предел упругости  $\sigma_y$ .

**4е допущение** Деформация материала конструкции в каждой его точке прямопропорциональны напряжениям в этой точке (закон Гука).

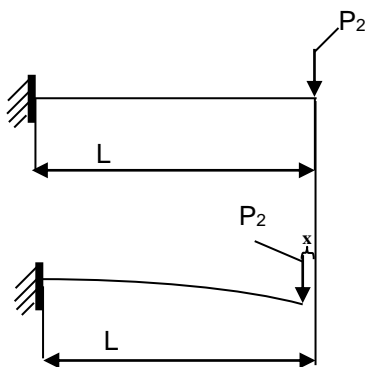


Рис. 1. Деформация балки под действием силы  $P_2$ .

**5е допущение** Деформации элементов конструкций в большинстве случаев настолько малы, что можно не учитывать их влияние на взаимное расположение нагрузок и на расстояния от нагрузок до любых точек конструкции.

**6е допущение** Результат воздействия на конструкцию системы сил равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности (принцип независимости действия сил)

Например, для изгибаемой балки прогиб от действия двух сил  $y$  равен сумме прогибов  $y_1$  и  $y_2$  от каждой силы в отдельности:

$$Y = y_1 + y_2$$

**7е допущение** Поперечное сечение, плоское до деформации, остается плоским и после деформации (гипотеза плоских сечений Бернулли).

**8е допущение** или принцип Сен-Венана. В точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, внутренние силы весьма мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок.

Этот принцип во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что может упростить расчет.



Например, при расчете рельса (рис. 1.3) как стержня, опирающегося на многие опоры (шпалы), можно фактическую нагрузку от колеса, распределенную по площадке контакта  $mn$  по некоторому закону (определить который довольно сложно), заменить сосредоточенной (равнодействующей) силой.

## Внешние и внутренние силы. Виды сил. Классификация сил.

Все силы, приложенные к системе, подразделяются на *внешние* (нагрузки) и *внутренние*.

### I Внешние силы

Внешними силами называют силы взаимодействия между рассматриваемым элементом конструкции и связанными с ним телами. Или внешние силы это силы, приложенные к телу извне и стремящиеся вызвать деформацию тела. Т.е. все силы, вызывающие деформацию тела, считаются внешними.

Внешние силы можно разделить на активные и пассивные.

а) **Активные силы** – силы приложенные извне и всегда направлены на перемещение системы.

Например. Нас не удивляет что удар молотка по гвоздю (активная нагрузка) вызывает перемещение гвоздя (системы). Труднее понять что груз висящий на тросе крана, пытается переместить кран (систему) вниз, а следовательно, груз это активная нагрузка. Большинство воздействий на тела это активные нагрузки.

Активные нагрузки, действующие на сооружения и их элементы, представляют собой силы или пары сил (моменты), которые могут рассматриваться как сосредоточенные или распределенные.

*Сосредоточенная сила* - нагрузка, приложенная к небольшому участку поверхности (точке).

Активные сосредоточенные нагрузки будем обозначать буквой  $P$ . Измеряются сосредоточенные нагрузки в Ньютонах [Н].

На расчетных схемах сосредоточенные нагрузки обычно показываются следующим образом (рис. 3).

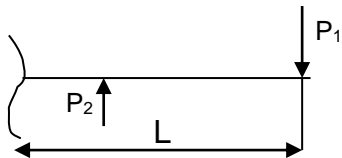


Рис. 3 Сосредоточенные нагрузки приложенные к стержню

*Распределенная нагрузка* - нагрузка, распределенная по поверхности либо по объему тела.

Мерой такой нагрузки является ее интенсивность  $q$  — величина нагрузки на единицу длины, площади или объема, измеряемая в [Н/м]. [Н/м<sup>2</sup>]. [Н/м<sup>3</sup>].

Различают равномерно и неравномерно распределенные нагрузки

На расчетных схемах распределенные нагрузки (рис. 4) показываются следующим образом  
рис. 4а - равномерно распределенная нагрузка  $q_1$ , б - неравномерно распределенные нагрузки  $q_2, q_3$ .

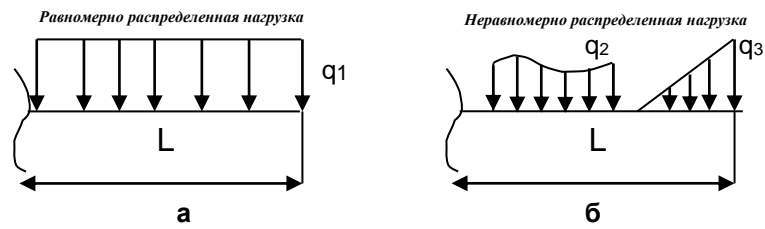


Рис.4 Распределенные нагрузки приложенные к стержню

Здесь следует отметить, что интенсивность  $q$  усилием не является, т.е.  $q \neq F_q$ . Усилие от равномерно распределенной нагрузки (равнодействующая) находится как произведение интенсивности  $q$  на длину, площадь либо объем распределения  $F_q = q \cdot L$  (рис 4 а).

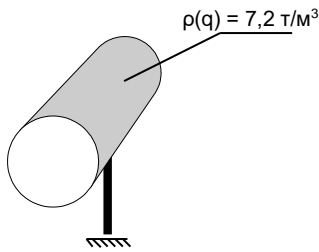


Рис. 5. Стальная балка, опирающаяся на стержень

Пример.

Дана стальная балка, опирающаяся на стержень рис. 5. Можно ли определить вес балки, если ее плотность  $7,2 \text{ т/м}^3$ .

Решение.

Определить вес данной балки невозможно, так как неизвестны ее размеры. Плотность балки в данном случае это интенсивность  $q$  равномерно распределенной по объему тела веса. Что бы получить вес тела, необходимо перемножить интенсивность (плотность) на

объем тела.  $F = V \cdot \rho$

Т.е. сама по себе плотность, как и интенсивность  $q$ , не является усилием. Усилие от равномерно распределенной нагрузки это всегда произведение интенсивности  $q$  на участок или объем распределения  $F = q \cdot L$

*В независимости от характера распределения результирующую  $F_q$  распределенной по длине стержня нагрузки можно рассчитать как площадь эпюры распределения на расчетной схеме.*

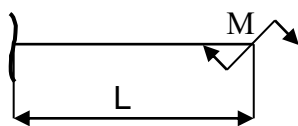


Рис. 6. Изгибающий момент (пара сил) приложенный в точке

Момент – пара сил приложенная в точке либо распределенная длине стержня и вызывающая его кручение либо изгиб. На расчетных схемах изгибающие моменты обычно показывают следующим образом (рис 6). Единицы измерения моментов **[Н•м]**

## Лекция 2

б) **Пассивные силы** - опорные реакции, внешние силы сопротивляющиеся перемещению конструкции.

Следует отметить, что реакции опор так же являются внешними силами (т.е. силами стремящимися деформировать тело).

Рассмотрим такой пример. Пусть нам необходимо согнуть деревянную палку используя в качестве опоры камень. Подложив камень под палку и приложив усилия на ее концы, мы изогнем ее. Расчетная схема данного действия представлена на рис.7 а.

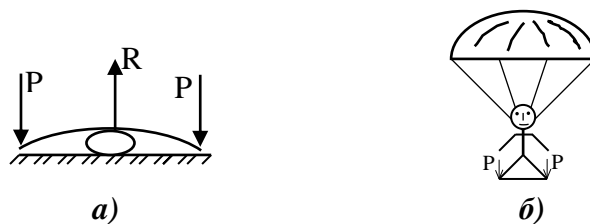


Рис.7. Расчетные схемы

А теперь представьте, что парашютист, парящий в воздухе, пытается аналогично согнуть ногами палку рис.7 б. Схема а отличается от схемы б только тем, что в случае с парашютистом отсутствует реакция опоры R. Именно эта реакция приводит к деформации тела, а следовательно реакцию опоры следует считать внешней силой.

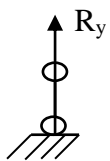
Из вышесказанного можно сделать вывод - реакция опоры это внешняя сила направленная на деформацию тела и препятствующая его перемещению.

### Типы опор балок

При рассмотрении типов опор балок не следует забывать, что опорные реакции сопротивляющиеся перемещению конструкции являются пассивными **внешними** нагрузками.

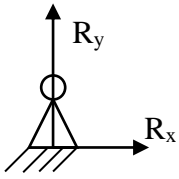
Опоры балок, рассматриваемых как плоские системы, бывают трех основных типов.

- 1. Подвижная шарнирная опора.** Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникнуть только одна реакция, которая перпендикулярна плоскости качения и проходит через центр катка.

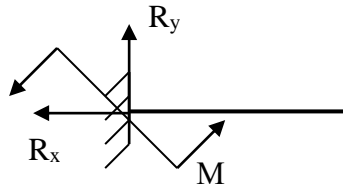
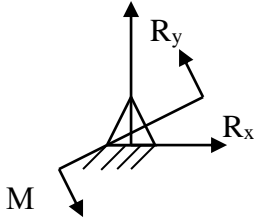


Подвижные опоры дают возможность балке беспрепятственно изменять свою длину при изменении температуры и тем самым устраняют возможность появления температурных напряжений.

## 2. Неподвижная шарнирная опора (рис.).



Такая опора допускает вращение конца балки, но устраняет поступательное перемещение ее в любом направлении. Возникающую в ней реакцию можно разложить на две составляющие — горизонтальную и вертикальную.



## 3. Жесткая заделка, или защемление

Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре может в общем случае возникнуть реакция,

которую обычно раскладывают на две составляющие (вертикальную и горизонтальную) и момент защемления (реактивный момент).

Балка с одним **заделанным концом называется консольной балкой** или просто **консолью**.

## II Внутренние силы

Внутренние силы это силы взаимодействия между соседними частицами тела (молекулами, кристаллами, атомами). Эти силы стремятся сохранить тело как единое целое, т.е. препятствуют деформации тела.

Например. К консольной балке (рис.8) приложены внешние нагрузки  $P_1$ , сжимающая тело и  $P_2$ , изгибающая стержень (а). В результате в теле возникает комплекс внутренних сил (напряжений), сопротивляющийся растяжению, сжатию и сдвигу внутренних частиц тела, т.е. сопротивляющихся его деформации и стремящихся вернуть тело в исходное положение (б).

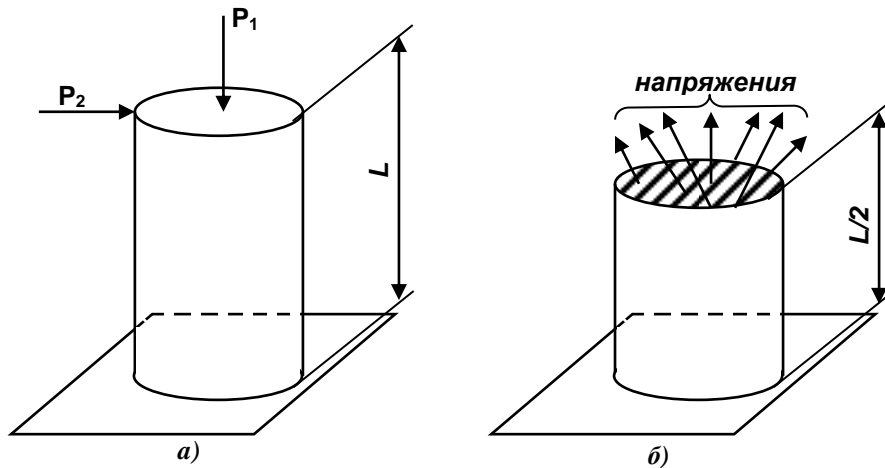


Рис. 8. Напряжения, возникающие от действия активных нагрузок

В сопротивлении материалов изучают и вычисляют только те дополнительные внутренние силы, которые появляются в результате нагружения. Так как, провести прямой замер внутренних сил в большинстве случаев невозможно. Поэтому расчет распределения и интенсивности внутренних сил производят путем выражения их через внешние. Т.е. распределение и интенсивность внутренних сил зависит от расположения, способа приложения и величины нагрузок.

### Напряжения. Виды напряжений.

#### Эпюры внутренних силовых факторов. Опасное сечение стержня

#### Связь деформаций с напряжениями в поперечных сечениях стержня

Внутренние силы (напряжения), возникающие под действием активных нагрузок внутри тела всегда расположены разнонаправленно (рис. 9 (а)), однако результирующие этих напряжений условно раскладывают на вертикальную и горизонтальную составляющую. При этом напряжения перпендикулярные (нормальные) к плоскости сечения называют нормальными и обозначаются  $\sigma$

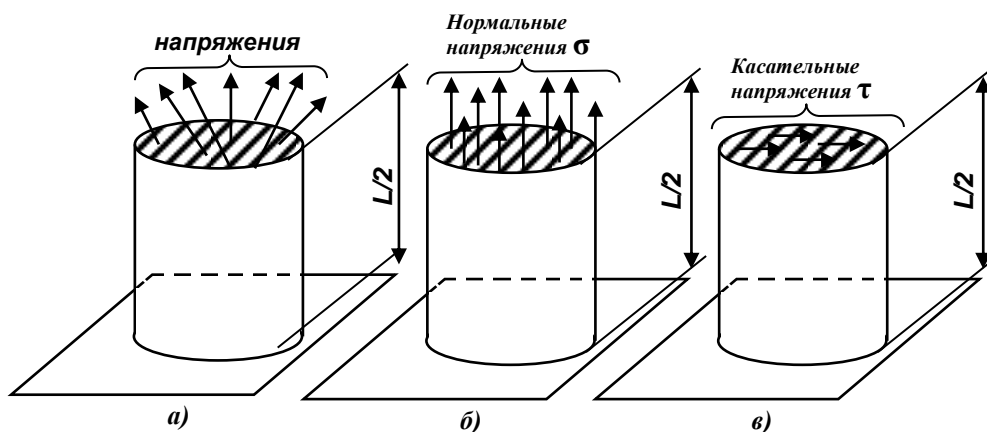


Рис. 9. Условное распределение напряжений на нормальные и касательные

(рис. 9 (б)),. Напряжения лежащие в плоскости сечения, называются касательными  $\tau$  (рис. 9 (в)).  
Единицы измерения напряжений [Н/м<sup>2</sup>]

Из характера напряжений видно – **нормальные напряжения сопротивляются растяжению или сжатию тела, касательные – сдвигу частиц.**

Примером возникновения только касательных напряжений можно считать срез заклепки, скручивание вала. При сжатии колонны, подпирающей свод здания возникают только нормальные напряжения сопротивляющиеся сжатию.

### Связь деформаций с напряжениями в поперечных сечениях стержня

Рассмотрим возникновение внутренних сил под действием различных видов деформации.

#### а) Растяжение-сжатие

При приложении к консольной балке внешней активной силы  $P$  происходит деформация конструкции выражающаяся в растяжении волокон (рис. 10). В заделке возникает реакция опоры  $R_x$ . Растяжению волокон внутри тела препятствуют нормальные напряжения  $\sigma$ . Суммирование напряжений  $\sigma$  по площади сечения дает нам сосредоточенную силу  $N$  в этом сечении.

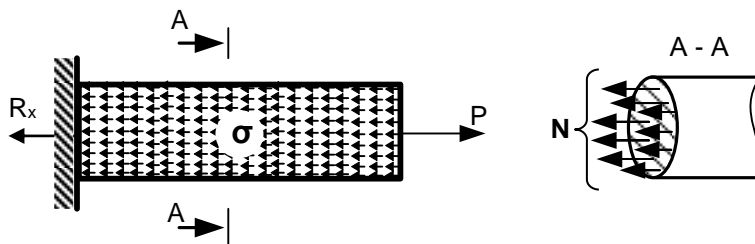


Рис. 10. Комплекс силовых факторов при растяжении

#### б) Кручение

При приложении к консольной балке внешнего крутящего момента  $M_1$ , в возникает пассивная сила (реактивный крутящий момент  $M_R$ ) (рис.11). Тело балки деформируется, при этом происходит сдвиг частиц в поперечных сечениях.

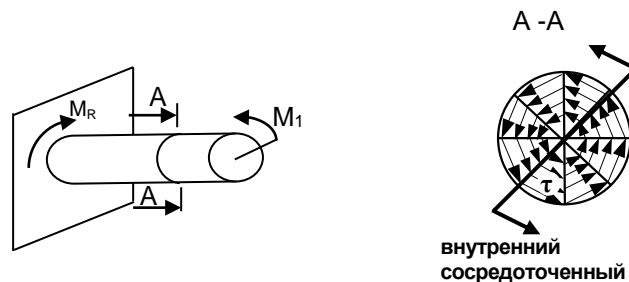


Рис. 11. Комплекс силовых факторов при кручении



Возникающие при этом касательные напряжения  $\tau$  создают внутренний крутящий сосредоточенный момент  $M_{кр}$ , численно равный сумме этих касательных напряжений по площади сечения.

в) Изгиб.

В отличие от предыдущих рассмотренных случаев, деформация при изгибе имеет более сложный характер.

Рассмотрим рис. 12. К консольной балке приложена внешняя активная сила  $P_2$ . Под воздействием этой нагрузки происходит изгиб стержня. При этом верхние волокна балки растягиваются, а нижние сжимаются. Разделение между растянутыми и сжатыми волокнами происходит по так называемой *нейтральной оси*, располагающейся в центре тяжести сечения стержня. Волокна нейтральной оси не деформируются, а следовательно, в них отсутствуют напряжения. Так как есть деформации растяжения и сжатия, то возникают нормальные напряжения  $\sigma$ , которые препятствуют данным деформациям (в верхних волокнах - препятствие растяжению в нижних - сжатию (рис. 12 а). При этом в теле балки создаются пары сил (моменты от нормальных напряжений) (рис 12, б). Сумма этих моментов по площади сечения дает нам результирующий внутренний момент в данном сечении  $M_{изг}$ .

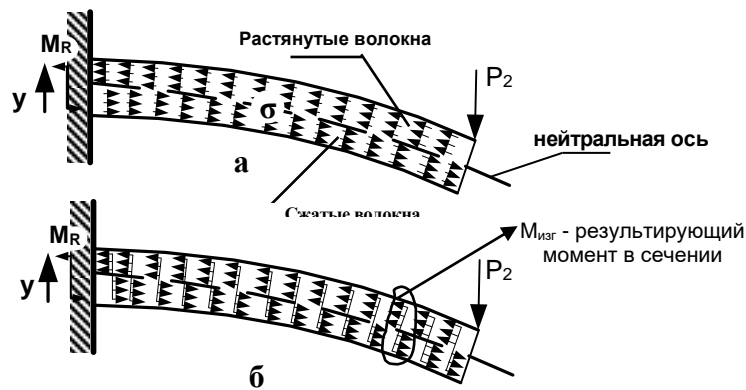


Рис.12. Растяжение волокон балки при изгибе

Однако это только одна сторона напряженного состояния балки при изгибе.

Предположим, что конструкция создана из материала, в котором возникают только поперечные деформации (сдвиг частиц), а продольные деформации (растяжение-сжатие) волокон абсолютно невозможны. Тогда под действием активной силы  $P_3$  произойдет деформация, представленная на рис. 13. То есть соседние сечения будут сдвинуты относительно друг друга, а следовательно, возникнут касательные напряжения  $\tau$ . Суммирование по площади сечения данных напряжений даст нам их результирующую - внутреннюю силу  $Q$ .

Следовательно, при изгибе существует как растяжение-сжатие, так и сдвиг частиц относительно друг друга, отсюда в балке возникают как нормальные  $\sigma$ , так и касательные

напряжения  $\tau$ . Поэтому при рассмотрении задач на изгиб стержня строятся отдельно эпюры

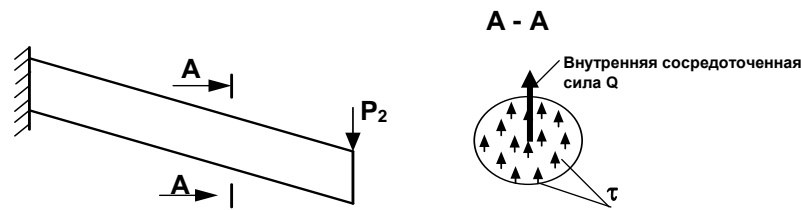


Рис. 13. Сдвиг сечений стержня при изгибе

внутренней поперечной силы  $Q$  (результатирующей  $\tau$ ), сопротивляющейся сдвигу частиц, и эпюра внутреннего сосредоточенного момента  $M_{\text{изг}}$  (результатирующего от действия нормальных напряжений), сопротивляющегося растяжению-сжатию волокон.

То есть при нахождении распределения внутренних сил по длине стержня мы ищем не **распределенные по сечению напряжения  $\sigma$  и  $\tau$** , а **заменяем их сосредоточенными силами  $Q$ ,  $M_{\text{изг}}$ ,  $M_{\text{кр}}$ ,  $N$** .

Для количественной оценки характера распределения напряжений по длине тела используют эпюры.

**Эпюра** – графическое изображение распределения внутренних сосредоточенных сил по длине стержня либо внутренних распределенных по сечению детали.

При построении эпюр, напряжения, распределенные внутри тела по всему сечению, для удобства (в зависимости от вида внешней нагрузки: изгиб, кручение, растяжение, и т.д.), заменяют условными внутренними сосредоточенными силами:

На рис. 10. представлены зависимости распределения внутренних сил при растяжении **а** и изгибе **б** стержня.

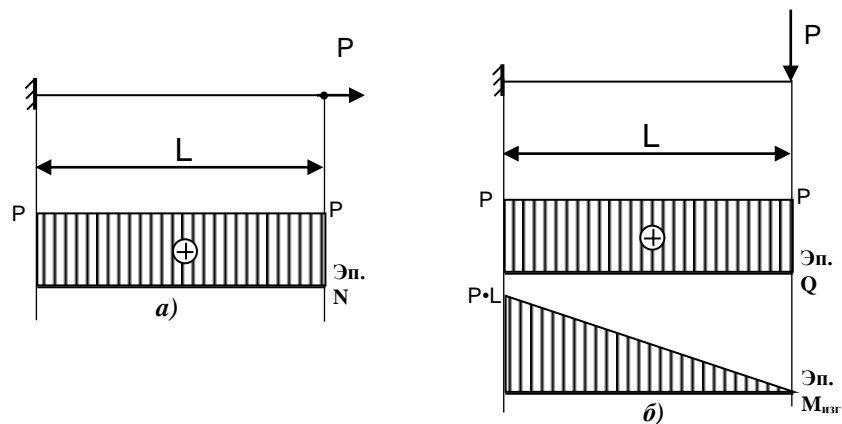


Рис. 10. Пример построения эпюр: продольной силы  $N$  (а); поперечной силы  $Q$  и внутреннего изгибающего момента  $M_{\text{изг}}$  (б)

Одной из основных задач построения эпюр является определение *опасного сечения стержня*.

Опасное сечение – сечение, в котором с наибольшей вероятностью произойдет разрушение системы.

Местоположение опасного сечения обычно там, где возникают наибольшие внутренние силы.

***Нахождение опасного сечения стержня в симметричных балках постоянной жесткости (т.е. с постоянной формой сечения и материалом по длине балки )***

### ***Растяжение- сжатие***

При растяжении сжатии опасное сечение следует определять учитывая вид материала.

*Пластичный материал* – опасное сечение там, где на эпюрах находится наибольшее значение внутренней продольной силы в независимости от ее знака.

*Хрупкий материал* – опасное сечение там, где наибольшая положительная продольная сила. Однако если на эпюре есть отрицательное значение продольной силы значительно превышающее ее максимальное положительное значение, то это сечение так же считать опасным

***Кручение.*** Опасное сечение там, где на эпюре наибольший крутящий момент  $M_{кр}$ .

***Изгиб*** – опасное сечение там где на эпюре наибольшее значение изгибающего момента  $M_{изг}$

Однако если на эпюре поперечной силы  $Q$  есть значения значительно превышающие значение максимального изгибающего момента, то это сечение так же считать опасным.

Подводя итог вышесказанному, рассмотрим следующую схему силовых факторов (рис. 11).

Все силы действующие в системе подразделяются на внутренние и внешние. Внешние деформируют тело, внутренние сопротивляются деформации. Внешние силы бывают активные (стремящиеся переместить систему) и пассивные(сопротивляющиеся перемещению). На расчетных схемах активные силы обычно обозначают  $F, P, M, q$ , и др. пассивные  $R, x, y, z$  и др.

Внутренние силы – напряжения, бывают нормальные  $\sigma$  сопротивляющиеся растяжению, сжатию тела, и касательные  $\tau$  сопротивляющиеся сдвигу частиц тела. На эпюрах распределенные напряжения  $\sigma$  выражают через сосредоточенные внутренние силы  $N, M_{изг}$  и др., распределенные напряжения  $\tau$  через сосредоточенные внутренние силы  $Q, M_{кр}$  и др.

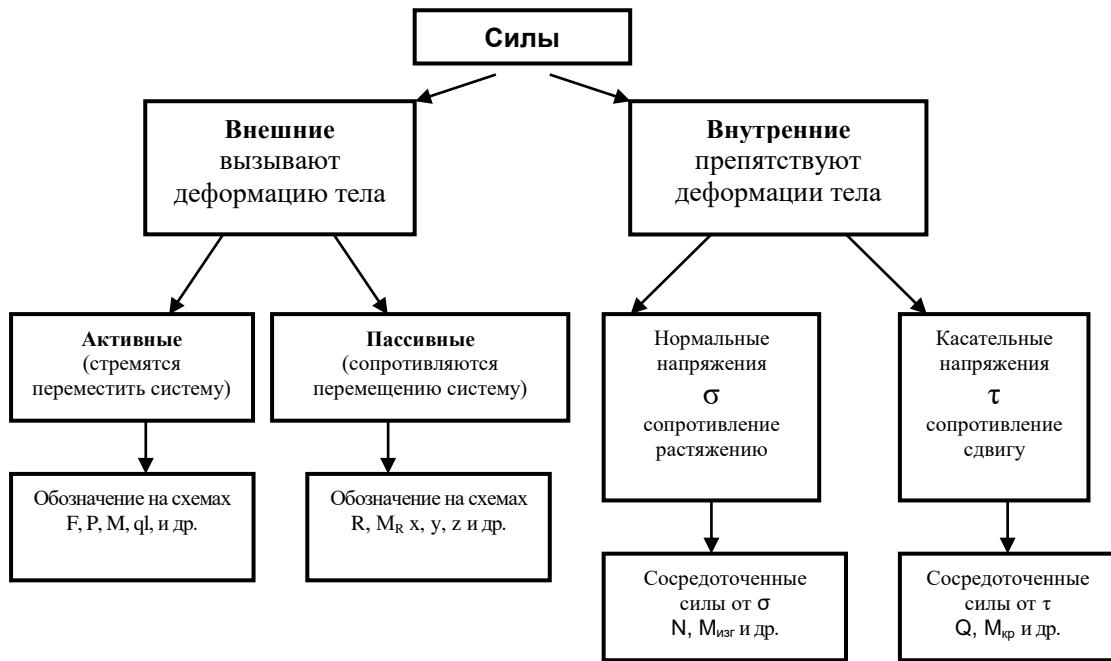


Рис. 11. Классификация силовых факторов

### Лекция 3

#### Метод сечений

Для установления связи между внешними и внутренними силами используется метод сечений. Так как внутренние силы взаимно уравновешены и стоит задача выразить их через внешние, то необходимо выполнить такую операцию со стержнем, чтобы внутренние силы стали явными. Для этого применим метод сечений или (метод РОЗУ).

Дан стержень рис. Нужно найти внутренние силы действующие в стержне в результате нагрузок  $P_1, P_2, P_3, P_n$

Применим метод РОЗУ. Этот метод состоит из 4 частей

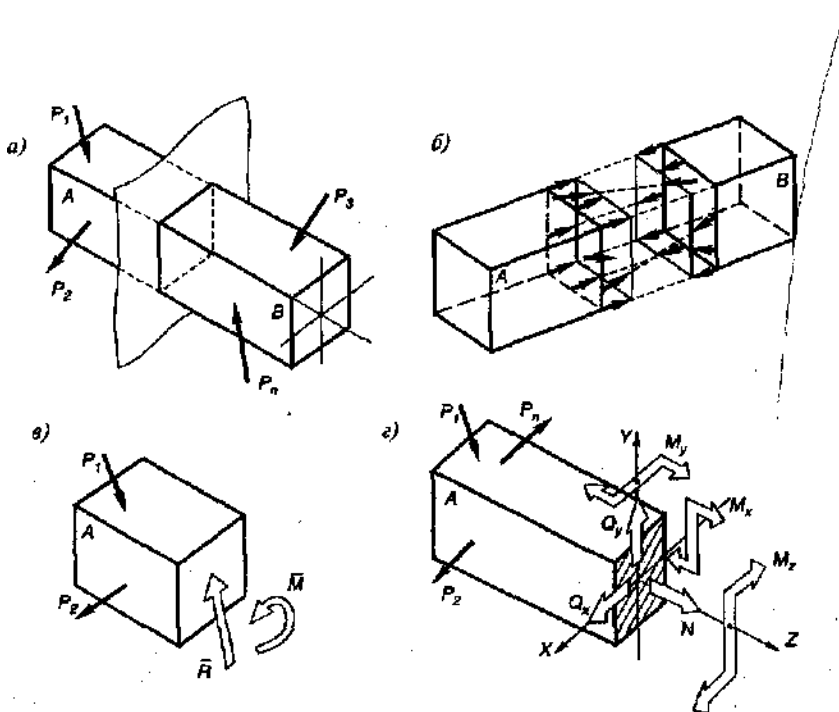
1- Р – Разрезаем

Данный стержень разрезаем произвольно в любой части Рис а

2 – О – отбрасываем любую из разрезанных частей рис в

3 - Заменяем внутренние силы (рис б) равнодействующей силой  $R$  и моментом  $M$  и раскладываем эти равнодействующие на их составляющие:  $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ .

4 – У - Уравновешиваем. Для установления связи внутренних и внешних сил можно к этой части применить уравнения равновесия (уравновешиваем), так как известно, что если тело находится в целом в равновесии, то в равновесии и любая его часть. Для пространственной системы существует 6 уравнений равновесия:



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Рассмотрим, например,

уравнение  $\sum F_z = 0$ . Из внутренних усилий (рис.г) на ось Z

проектируется только продольная сила  $N$ . Тогда

$$N + \sum F_z = 0$$

$$N = - \sum F_z$$

Аналогичны определяются

$Q_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ .

#### Правила знаков внутренних силовых факторов.

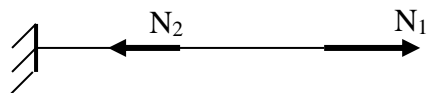
Для построения эпюр необходимо знание правил знаков внутренних силовых факторов

Рассмотрим правила знаков для внутренних усилий, применяемые в машиностроении:

Определение знака продольной силы  $N$ .

Продольная сила  $N$  считается положительной, если она вызывает растяжение отсеченной части и отрицательной, если вызывает ее сжатие.

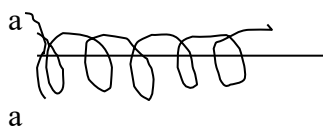
опустим дана следующая схема:



Определить знаки представленных сил

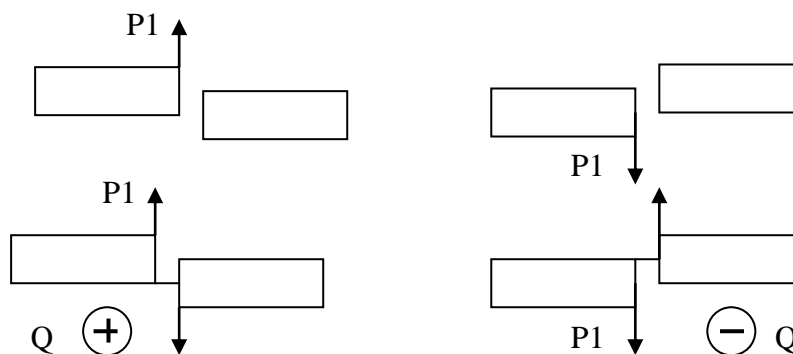
Для этого отсекаем представленный стержень накладываем сверху воображаемую пружину, если рассматриваемая сила растягивает пружину, то она положительна, если сжимает то отрицательная.

Следовательно  $N_1$  положительна, а  $N_2$  отрицательна.



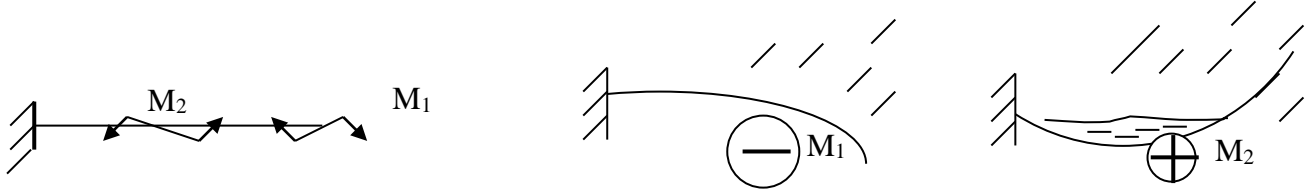
Поперечная сила  $Q$  определяется по правилу правой руки.

Либо по следующему правилу знаков



Если рассматриваемая сила  $P1$  пытается сдвинуть сдвинуть сечение стержня таким образом, что построенная пара сил вращается по часовой стрелке, то возникающая при этом внутренняя сила  $Q$  считается положительной. Иначе  $Q$  отрицательна.

3) Знак изгибающего момента  $M$  определяют по правилу дождя.



Изгибающий момент положителен, если растянуты нижние волокна отсеченной части стержня, и отрицателен, если растянуты верхние волокна.

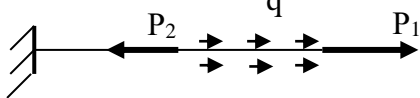
Эпюра изгибающих моментов строится на сжатых волокнах.

Правило знаков для крутящего момента удобно принимать произвольным.

### Аналитическое определение продольной силы $N$ при растяжении-сжатии.

Центральным растяжением (или центральным сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только продольная сила

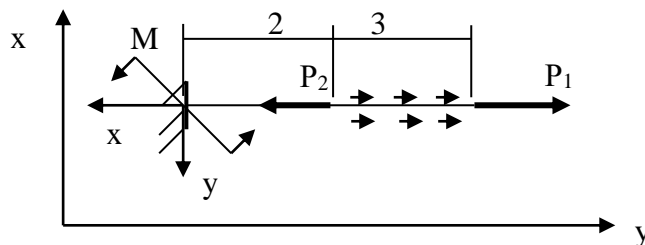
Рассмотрим случай осевого растяжения когда внешние силы действуют по оси стержня.



Дан стержень к которому по оси приложены усилия  $P_1 = 2$  Н и  $P_2 = 18$  Н и распределенная нагрузка  $q=4$  Кн/М приложенная на участок в 3 м. Определить реакцию опор в стержне и построить эпюру продольных сил  $N$ .

1) Так как система находится в покое, то для определения реакции опоры воспользуемся следующим правилом: сумма действия всех сил и моментов на систему равно 0.  $\Sigma F_{x,y}=0$ ,  $\Sigma M=0$ .

Мы знаем, что при защемлении может возникнуть 3 реакции опоры. Обозначим их.



Спроецируем все силы на оси  $x$  и  $y$ . Составим уравнения равновесия:  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M = 0$ .

Проецируем все силы на ось  $x$ .

$$-X - P_2 + P_1 + q \cdot 3 = 0$$

$$X = P_1 - P_2 + q \cdot 3$$

$$X = 2 - 18 + 12 = -4$$

Знак минус показывает, что реально реакция опоры направлена в противоположную сторону. Зарисуем полученную схему

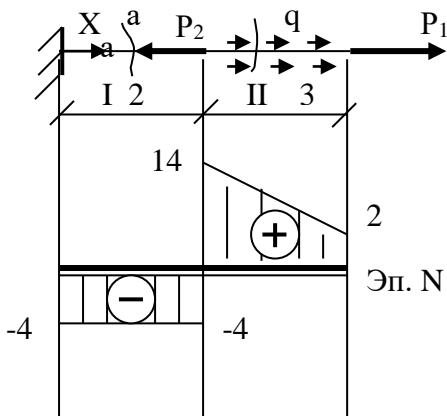
Проецируем силы на ось Y и составим уравнение  $\Sigma F_y = 0$ ,

$$-Y = 0$$

Составим уравнение моментов при условии  $\Sigma M = 0$ .

$$M = 0$$

Перейдем к построению эпюр, для чего разобьем стержень по месту действия приложенных внешних нагрузок, на два участка.



$$N = P_1 + q \cdot z = 2 + 4z$$

Рассмотрим участок I По правилу РОЗУ определяем продольную силу N на данном участке. При этом пользуемся правилами знаков для продольных сил.

- Разрезаем (сечение a-a)
- Отбрасываем левую часть от сечения тем рассматриваем I участок с права на лево.
- Замещаем все продольные силы равнодействующей N
- Уравниваем – Выражаем внутренние силы через внешние путем составления уравнения.

$$I \quad Z \leftarrow 0 - 2$$

$$N = P_1 - P_2 + q \cdot 3 = 2 - 18 + 12 = -4 - \text{const}$$

На II участке По правилу РОЗУ

$$Z = 0 \quad N = 2$$

$$Z = 3 \quad N = 14$$

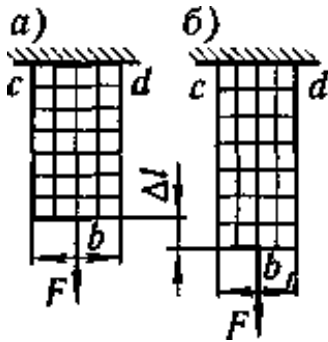
Строим эпюру.

При рассмотрении консольных стержней возможно решение задачи без нахождения реакций опор однако рассматривать систему следует только со свободного **конца**.



## Лекция 4

## Напряжения при растяжении-сжатии. Гипотеза Бернулли



Если на поверхность призматического стержня нанести сетку линий, параллельных и перпендикулярных оси стержня (рис.), и приложить к нему растягивающую силу, то можно убедиться в том, что линии сетки и после деформации останутся взаимно перпендикулярными, но расстояния между ними изменятся (рис. 2). Все горизонтальные линии, например  $cd$ , переместятся вниз, оставаясь горизонтальными и прямыми.

Можно предположить также, что и внутри стержня будет такая же картина.

Из этого следует, что **поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его оси до деформации, останутся плоскими и нормальными к оси и после деформации.**

Эту гипотезу называют **гипотезой плоских сечений** или **гипотезой Бернулли.**

Такая картина деформаций дает основание считать, что в поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению, а касательные напряжения равны нулю.

Продольная сила  $N$  есть равнодействующая нормальных напряжений в поперечном сечении:

$$N = \int_A \sigma dA$$

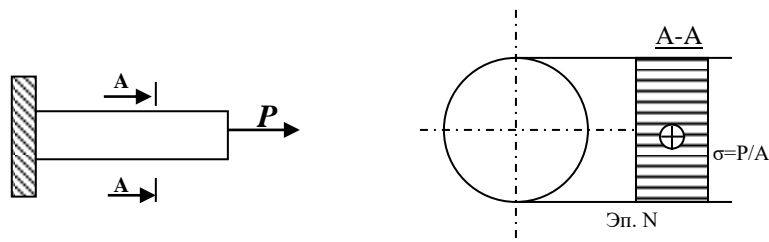
Поскольку  $\sigma = \text{const}$ , из формулы получим

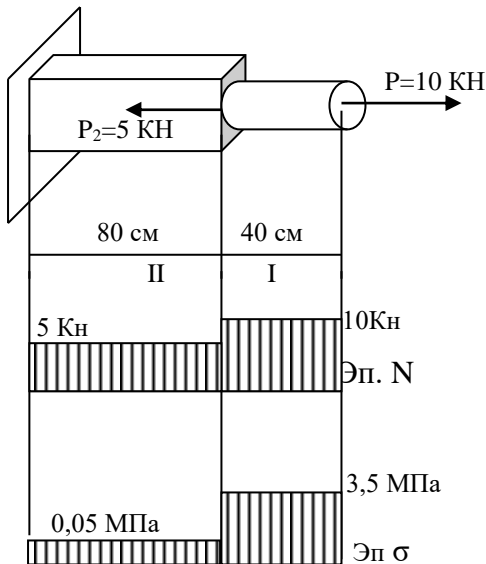
$$N = \sigma A,$$

Откуда

$$\sigma = N/A.$$

Из вышесказанного следует, что эпюра напряжений по высоте сечения, при центральном растяжении-сжатии имеет следующий характер.





### Пример

Дан стержень, состоящий из двух частей различной конфигурации квадратный брус со стороной 10 см и цилиндр диаметром 6 см определить напряжения  $\sigma$  в каждой части стержня.

Так как рассматривается консольная балка, то реакции опоры не находим, но рассматриваем систему со свободного конца

Рассмотрим участок I

Сосредоточенная сила N на данном участке по правилу

РОЗУ равна

$$N = +P = 10 \text{ кН}$$

Напряжения на участке равны

$$\sigma = N/A.$$

площадь участка  $A = \pi R^2 = 3,14 \cdot 3^2 = 28,26 \text{ см}^2$

$$\sigma = 10/28,26 = 0,35 \text{ кН/см}^2 = 3,5 \text{ МПа}$$

Рассмотрим участок II

Сосредоточенная сила N на данном участке по правилу РОЗУ равна

$$N = +P - P_2 = 10 - 5 = 5 \text{ кН}$$

Напряжения на участке равны

$$\sigma = N/A.$$

площадь участка  $A = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см}^2$

$$\sigma = 5/100 = 0,05 \text{ кН/см}^2 = 0,5 \text{ МПа}$$

## 2.4 Опытное изучение свойств материала

Для изучения свойств материалов и установления значения предельных напряжений (по разрушению или по пластическим деформациям) производят испытания образцов материала вплоть до разрушения. Испытания производят при нагрузках следующих категорий: статической, ударной и циклической (испытание на усталость или выносливость).

По виду деформации, испытываемой образцом, различают испытания на растяжение, сжатие, кручение и изгиб. Значительно реже проводят испытания на сложное сопротивление, например сочетание растяжения и кручения.

Эксперимент обычно ведут в условиях, предусмотренных ГОСТами.

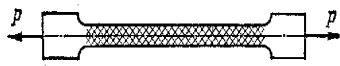
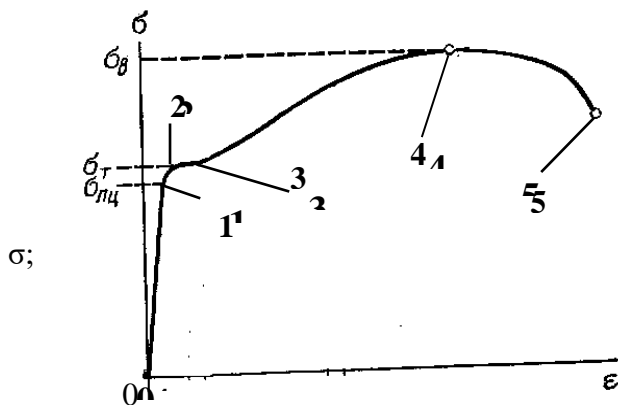


Рис. 11.2



В процессе испытания специальное устройство автоматически вычерчивает график, изображающий (в прямоугольной системе координат) зависимость между действующей на образец продольной силой и удлинением (или укорочением) образца, т. е. вычерчивает диаграмму в координатах «сила—удлинение». Для изучения свойств материала значительно удобнее иметь диаграммы, построенные в координатах «напряжение — относительная деформация».

На рис. представлена диаграмма растяжения малоуглеродистой стали СтЗ; по оси ординат отложены напряжения  $\sigma$ , а по оси абсцисс—относительные удлинения  $\epsilon$ .



#### Участок 0-1

На данном участке диаграмма представляет собой прямую линию, т.е. относительные удлинения  $\epsilon$  прямо пропорциональны напряжениям иными словами, до этого предела справедлив закон Гука.

Напряжение  $\sigma_{плц}$  называется **пределом пропорциональности**.

#### Участок 1 - 2

После достижения предела пропорциональности деформации  $\epsilon$  растут не прямо пропорционально напряжениям, а быстрее до значения ординаты соответствующей  $\sigma_t$

#### Участок 2 - 3

Начиная с того момента, когда напряжения достигнут некоторой величины  $\sigma_t$ , деформации растут без увеличения напряжений, и на диаграмме получается участок, параллельный оси абсцисс. Это явление называется *текучестью материала*, а напряжение  $\sigma_t$  — *пределом текучести*.

Участок диаграммы, параллельный оси абсцисс, называется *площадкой текучести*.

#### Участок 3 - 4

При дальнейшем растяжении образца напряжения (а следовательно, и растягивающая сила) вновь начинают повышаться. Участок диаграммы 3—4 от конца площадки текучести до наивысшей точки называют *зоной упрочнения*.

Наибольшее условное напряжение, выдерживаемое образцом, называется *пределом прочности*, или *временным сопротивлением*, и обозначается. Это напряжение соответствует точке 4 диаграммы.

#### Участок 4 - 5

На данном участке образца наблюдается дальнейшее растяжение образца, сопровождающееся уменьшением растягивающей силы

При увеличении нагрузки в зоне упрочнения на образце появляется местное сужение; образуется так называемая *шейка* (рис.), в пределах которой и происходит затем разрыв образца.

Следовательно, *предел прочности* представляет собой отношение наибольшей силы, которую выдерживает образец, к первоначальной площади его поперечного сечения.

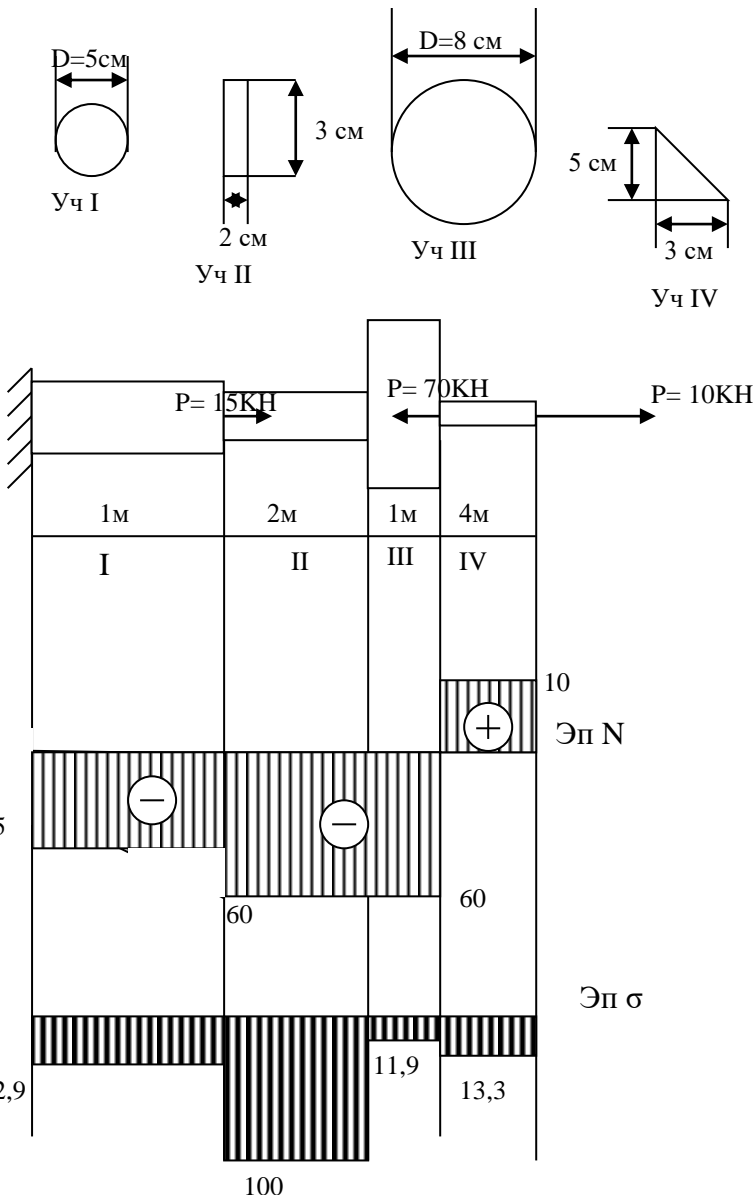
При этом *условное напряжение* в образце (определяемое делением величины растягивающей силы на первоначальную площадь поперечного сечения образца) уменьшается соответственно уменьшению величины растягивающей силы (участок 4—5 на рис)

Такая диаграмма удлинения образца под действием внешних нагрузок, представленная на рис. характерна лишь для пластичных материалов. При этом нагрузки на деталь должны быть такими, что бы напряжение возникающие внутри материала не превышали предела текучести  $\sigma_T$ .

Задача(На самостоятельное рассмотрение)

Найти реакцию опоры Построить эпюры продольной силы N и нормальных напряжений в ступенчатой балке следующих размеров

Решение



Найдем реакцию опоры  
спроецировав все силы на ось x  
 $R = 70 - 10 - 15 = 55 \text{ кН}$

Напряжения на участке I равны  
 $\sigma = N/A.$

площадь участка  
 $A = \pi R^2 = 3,14 * 2,5^2 = 19,625 \text{ см}^2$   
 $\sigma = 45 / 19,625 = 2,29 \text{ кН/см}^2 = 22,9 \text{ МПа}$

УЧ II  
площадь участка  $A = 2 * 3 = 6 \text{ см}^2$   
 $\sigma = 60 / 6 = 10 \text{ кН/см}^2 = 100 \text{ МПа}$

УЧ III  
площадь участка  
 $A = \pi R^2 = 3,14 * 4^2 = 50,24 \text{ см}^2$   
 $\sigma = 60 / 50,24 = 1,19 \text{ кН/см}^2 = 11,9 \text{ МПа}$

УЧ IV

площадь участка  $A=5*3/2 =7.5\text{см}^2$

$\sigma =10/7.5=1.33 \text{ кН/см}^2= 13.3 \text{ МПа}$

## Лекция 5

В отличие от пластичных материалов характер удлинения хрупких материалов (чугун, бетон, камень, стекло и т.д.) имеет свои особенности (рис 14). При испытании хрупких образцов на диаграмме отсутствует площадка текучести, т.е. хрупкие материалы не текут. Поэтому максимально допустимые напряжения от действия активных нагрузок в хрупких материалах не должно превышать временного сопротивления  $\sigma_B$ .

Хрупкие материалы имеют еще одно характерное отличие от пластичных. Рассмотрим рис. 15. На данном рисунке представлены диаграммы растяжения и сжатия хрупкого материала - серого чугуна. В отличие от пластичных материалов диаграммы растяжения и сжатия хрупких материалов имеют различный характер. При этом временное сопротивление на сжатие у хрупких материалов выше временного сопротивления на растяжение. Т.е. на растяжение данные материалы работают намного хуже чем на сжатие.

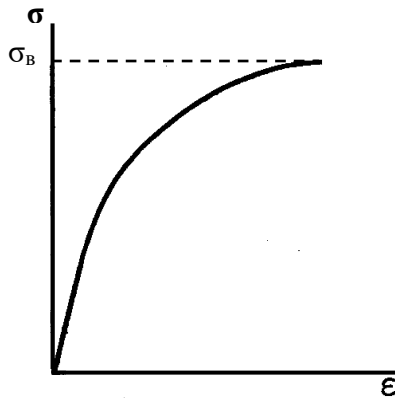


Рис.14. Диаграмма растяжения хрупкого материала

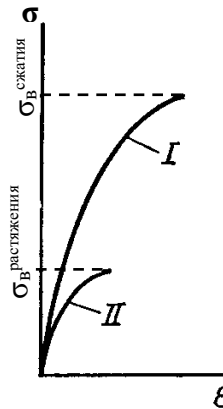


Рис. 15. Диаграмма растяжения – сжатия серого чугуна:  
I – растяжение; II - сжатие

Одним из характерных примеров плохой сопротивляемости хрупких материалов

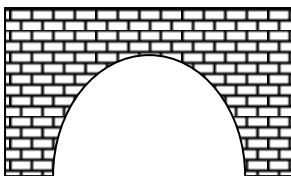


Рис. 16. Схема моста, работающего на сжатие

растягивающим усилиям, являются трещины в кирпичных зданиях. Кирпичная кладка, хорошо работающая под воздействием сжимающих нагрузок, достаточно легко разрывается при возникновении растягивающих усилий. Не случайно конфигурация мостов и арок, сделанных из хрупких материалов такова, что позволяет работать этим

конструкциям только на сжатие (рис. 16).

Некоторые пластичные материалы, например дюралюмин, не имеют на диаграмме растяжения площадки текучести (рис. 17). Для таких материалов вводится понятие *условного предела текучести*, в качестве которого принимается напряжение, соответствующее относительной остаточной деформации 0,2%. Эта механическая характеристика обозначается  $\sigma_{0,2}$ .

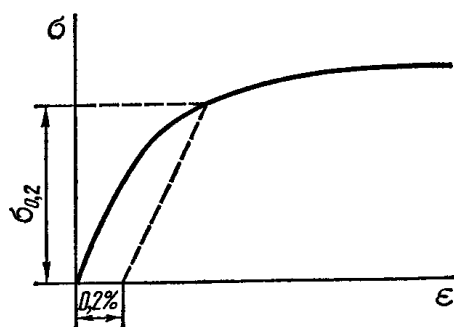


Рис. 17. Диаграмма растяжения нетекучего пластичного материала

Подводя итог вышесказанному, следует отметить, что максимальные напряжения, которым может подвергнуться деталь без вреда для ее функциональности для пластичных материалов составляет  $\sigma_T$ , либо  $\sigma_{0,2}$  (если материал не обладает текучестью). Для хрупких материалов внутренние напряжения не должны превышать временного сопротивления (предела прочности)  $\sigma_B$ , различного при растягивающих и сжимающих внешних нагрузках.

$\sigma_T$ ,  $\sigma_{0,2}$ ,  $\sigma_B$  – справочные **величины**.

### Коэффициент запаса прочности. Выбор допускаемых напряжений.

Рассмотрев предыдущую главу мы знаем, что максимальные напряжения, которые без вреда для функциональности выдерживает материал, не должны превышать  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{0,2}$ , либо  $\sigma_B$  (фактическая прочность материала).  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{0,2}$ ,  $\sigma_B$  – справочные величины установленные опытным путем. Однако существует ряд факторов снижающих фактическую прочность материала. При этом факторы, снижающие прочность детали (перегрузки, неоднородность материалов и т.д.), носят чаще всего случайный характер и предварительно не могут быть учтены.

Так как детали и сооружения в целом должны безопасно работать и при этих неблагоприятных условиях, то необходимо принять определенные меры предосторожности. С этой целью напряжения, обеспечивающие безотказную работу (эксплуатацию) машины или любого другого сооружения, должны быть ниже тех предельных напряжений, при которых может произойти разрушение или возникнуть пластические деформации.

Таким образом, принимают

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\sigma(T)}}{K}$$

где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение;

$\sigma_{\sigma(T)}$  – предел прочности, либо предел текучести материала.

$K$  — нормативный (т. е. предписываемый нормами проектирования конструкций) коэффициент запаса прочности, называемый также коэффициентом безопасности

При статических нагрузках за предельное напряжение для хрупких материалов принимают предел прочности, для пластичных — предел текучести, так как при напряжениях, равных пределу текучести, возникают значительные пластические деформации, которые недопустимы.

Таким образом, коэффициент запаса прочности вводится для того, чтобы обеспечить безопасную, надежную работу сооружения и отдельных его частей, несмотря на возможные неблагоприятные отклонения действительных условий их работы от расчетных.

Вопрос о нормативном коэффициенте запаса прочности  $K$  решается с учетом имеющегося опыта эксплуатации сооружений и машин.

В настоящее время один общий коэффициент запаса  $K$  расчлняют на ряд составляющих, **частных коэффициентов запаса** (обычно на 3 но иногда доходит и до 10), каждый из которых отражает влияние на прочность элемента конструкции какого-либо определенного фактора или группы факторов.

Коэффициент запаса прочности представляют в виде произведения

$$K = K_1 * K_2 * K_3$$

где  $K_1$  — коэффициент, учитывающий неточность в определении нагрузок и напряжений.

Значение этого коэффициента при повышенной точности определения действующих напряжений может приниматься равным 1,2 — 1,5, при меньшей точности расчета — 2 — 3

$K_2$  — коэффициент, учитывающий неоднородность материала, повышенную его чувствительность к недостаткам механической обработки. Принимается от 1,2-2,2

$K_3$  — коэффициент условий работы, учитывающий степень ответственности детали, равный 1 — 1,5.

В вопросе о частных коэффициентах и их значениях до сих пор нет единообразия.

Значения коэффициентов запаса прочности обычно принимают, на основании опыта конструирования и эксплуатации машин определенного типа.

В табл. приведены ориентировочные значения допускаемых напряжений при статическом нагружении для некоторых материалов.

Материалы	Допускаемые напряжения, МПа	
	на растяжение	на сжатие
Чугун серый в отливках: СЧ12 — 28	20—30	70 — 110



СЧ15 — 32	25—40	90 — 150
СЧ21 — 40	35 —55	160 — 200
Сталь:		
СтО и Ст2	140	140
СтЗ	160	160
СтЗ в мостах	140	140
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении	60 — 250	60 — 250
Сталь легированная конструкционная	140— 400 и	100 — 400 и выше
Дюралюминий	80 — 150	80 — 150 '
Латунь	70 — 140	70 — 140
Сосна вдоль волокон	7—10	10—12
Дуб вдоль волокон	9—13	13— 15
Кирпичная кладка	до 0,2	0,6 — 2,5
Бетон	0,1 — 0,7	1—9
Текстолит	15 —30	30—40
Гетинакс	50—70	50—70

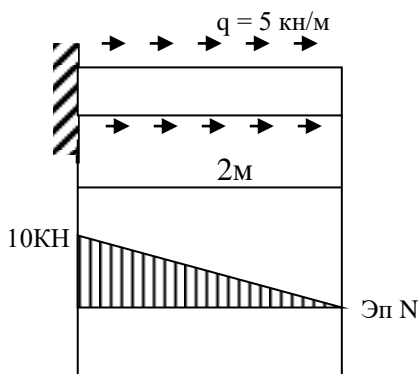
(Самостоятельное рассмотрение)

Построить эпюры продольной сосредоточенной силы  $N$  и напряжений  $\sigma$ , для круглой балки диаметром 12 см нагруженной распределенной нагрузкой  $q = 5 \text{ кН/м}$  Найти реакцию опоры

### Решение

Найдем реакцию опоры спроецировав все силы на ось  $x$

$$R = q \cdot 2 = 10 \text{ кН}$$



## Лекция 6

## Расчет на прочность конструкций при центральном растяжении-сжатии

Определив напряжение в опасном сечении растянутого (сжатого) и установив допустимое напряжение в соответствии с соображениями, изложенными выше, можно произвести оценку прочности стержня.

Для этого необходимо фактические напряжения в опасном сечении стержня сопоставить с допустимыми:

$$\sigma = N/A \leq [\sigma]$$

-Условие прочности при растяжении

При этом необходимо помнить, что допустимые напряжения для хрупких материалов при растяжении и сжатии различны

Пользуясь этим условием, можно решать следующие задачи:

**1. Проверять прочность стержня**, т. е. определять по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения стержня фактические напряжения ( $\sigma$  и сравнивать их с допустимыми. Фактические напряжения не должны отклоняться от допустимых более чем на  $\pm 5\%$ . Перенапряжение больше этого значения недопустимо с точки зрения прочности, а недонапряжение свидетельствует о перерасходе материала)

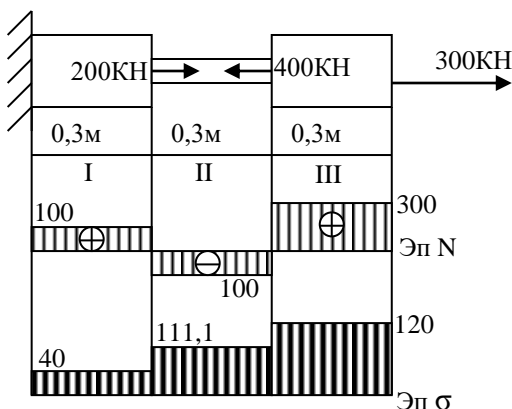
**2. Определять** (по известным нагрузке и допустимому напряжению) **размеры поперечного сечения стержня**, требуемые по условию его прочности:

$$A = N/[\sigma]$$

**3. Определять допустимую продольную силу** по заданным размерам поперечного сечения стержня и известному допустимому напряжению:

$$[N] = A * [\sigma]$$

Определив допустимую продольную силу и установив связь между продольной силой и нагрузкой (методом сечений), можно определить и допустимую нагрузку.



Пример

Дана квадратная стальная балка состоящая из 3 участков различных размеров. на участке I и III сторона балки равна 5 см. На участке II 3см.

Определить выдержит ли балка приложенную нагрузку.

## Рассмотрим участок I

Сосредоточенная сила  $N$  на данном участке по правилу РОЗУ равна

$$N = +200 - 400 + 300 = 100 \text{ кН}$$

Напряжения на участке равны

$$\sigma = N/A.$$

площадь участка  $A = a^2 = 5^2 = 25 \text{ см}^2$

$$\sigma = 100/25 = 4 \text{ кН/см}^2 = 40 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа} [\sigma]$$

## Рассмотрим участок II

Сосредоточенная сила  $N$  на данном участке по правилу РОЗУ равна

$$N = -400 + 300 = -100 \text{ кН}$$

Напряжения на участке равны

$$\sigma = N/A.$$

площадь участка  $A = a^2 = 3^2 = 9 \text{ см}^2$

$$\sigma = 100/9 = 11,11 \text{ кН/см}^2 = 111,1 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа} [\sigma]$$

## Рассмотрим участок III

Сосредоточенная сила  $N$  на данном участке по правилу РОЗУ равна

$$N = +300 \text{ кН}$$

площадь участка  $A = a^2 = 5^2 = 25 \text{ см}^2$

$$\sigma = 300/25 = 12 \text{ кН/см}^2 = 120 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа} [\sigma]$$

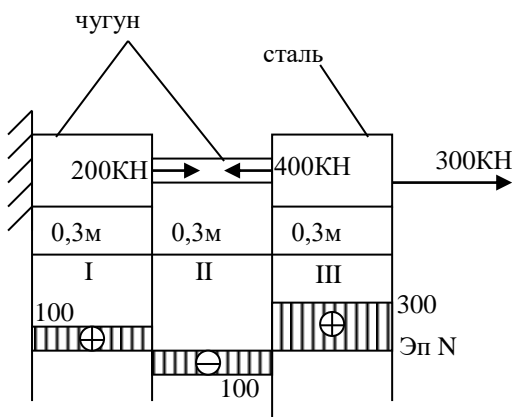
**Вывод.** Данная балка выдерживает заданные нагрузки

**Пример 2** найти реакцию опоры. Определить рациональные размеры рассмотренной ступенчатой балки если III участок выполнен из стали, а I и II из серого чугуна

## Решение

Найдем реакцию опоры спроецировав все силы на ось  $x$

$$R = 200 - 400 + 300 = 100 \text{ кН}$$



## Рассмотрим участок I

Сосредоточенная сила  $N$  на данном участке по правилу РОЗУ равна

$$N = +200 - 400 + 300 = 100 \text{ кН}$$

размеры поперечного сечения стержня, требуемые по условию его прочности:

$$A = N / [\sigma]$$

У серого чугуна предел прочности при растяжении и сжатии различен. (материал хрупкий)

Так как участок I подвержен растягивающим деформациям, то для расчетов данного участка выбираем предел прочности для СЧ при растяжении  $[\sigma_p] = 30 \text{ МПа} = 3 \text{ Кн/см}^2$

$$\text{площадь участка } A = 100 / 3 = 33 \text{ см}^2$$

$$\text{сторона балки равна } a = \sqrt{33} = 5,7 \text{ см}$$

#### Рассмотрим участок II

Сосредоточенная сила N на данном участке по правилу РОЗУ равна

$$N = -400 + 300 = -100 \text{ КН}$$

размеры поперечного сечения стержня, требуемые по условию его прочности:

$$A = N / [\sigma]$$

Так как участок I подвержен сжимающим деформациям, то для расчетов данного участка выбираем предел прочности для СЧ при сжатии  $[\sigma_{сж}] = 120 \text{ МПа} = 12 \text{ Кн/см}^2$

$$\text{площадь участка } A = 100 / 12 = 8,33 \text{ см}^2$$

$$\text{сторона балки равна } a = \sqrt{8,33} = 2,9 \text{ см}$$

#### Рассмотрим участок III

Сосредоточенная сила N на данном участке по правилу РОЗУ равна

$$N = +300 \text{ КН}$$

размеры поперечного сечения стержня, требуемые по условию его прочности:

$$A = N / [\sigma]$$

Так как участок III изготовлен из стали Ст 3 (пластичного материала) то предел прочности при растяжении и сжатии одинаков  $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ Кн/см}^2$

$$\text{площадь участка } A = 300 / 16 = 18,75 \text{ см}^2$$

$$\text{сторона балки равна } a = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ см}$$

### Определение деформаций и перемещений при центральном растяжении

При растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии — наоборот

Для большинства материалов при нагружении до определенных пределов опыты показывают следующую зависимость между относительным удлинением стержня  $\varepsilon$  и напряжением  $\sigma$ :

$$\varepsilon = \sigma/E$$

$$\varepsilon = \Delta l/l = (l_1 - l)/l$$

где  $\varepsilon$  — относительное удлинение стержня;

$\Delta l$  — абсолютное удлинение стержня;

$l$  — длина образца до деформации;

$l_1$  — длина образца после деформации;

$E$  — коэффициент, зависящий от материала и называемый модулем **продольной упругости (модуль упругости I рода)**. Он характеризует жесткость материала, т. е. его способность сопротивляться деформированию.

Эта зависимость носит название **закона Гука** и формулируется следующим образом: **линейные деформации прямо пропорциональны нормальным напряжениям.**

Модуль упругости различных материалов

Материал	$E$ , МПа	Материал	$E$ , МПа
Сталь	$210^5 - 2,210^5$	Алюминий	$0,67510^5$
Медь	$110^5$	Чугун	$0,7510^5 - 1,610^5$
Дерево	$110^4$	Стеклопластик	$0,1810^5 - 0,410^5$

Так как  $\sigma = N/A$ , то

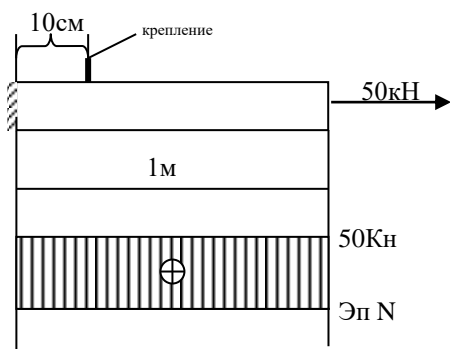
$$\Delta l = Nl/(EA)$$

Так как внутренние силы можно выразить через внешние то

$$\Delta l = Pl/(EA)$$

### ЗАДАЧА

Дан круглый стальной стержень длиной 1 м и диаметром 2 см к данному стержню приварено крепление на расстоянии 10 см от заделки, определить на сколько переместится данное крепление если с торца стержня приложить нагрузку в 50 кН.



Решение

Построим эпюру внутренних сил  $N$ . Используя метод РОЗУ

Зная эпюру внутренних сил  $N$  рассчитаем Абсолютное перемещение крепления по ф-ле

$$\Delta l = Nl/(EA) = Pl/(EA)$$

$$A_{\text{стержня}} = \pi \cdot 1^2 = 3,14 \cdot 1 = 3,14 \text{ см}^2$$

$$E_{\text{стали}} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$$

$$\Delta l = 50 \cdot 10 / (2 \cdot 10^4 \cdot 3,14) = 0,008 \text{ см} = 0,08 \text{ м}$$

### ПОПЕРЕЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ РАСЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Между продольной  $\varepsilon$  и поперечной  $\varepsilon'$  деформациями существует установленная экспериментально зависимость

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon$$

Где  $\nu$  - коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона), характеризующий способность материала к поперечным деформациям. При использовании формулой удлинение считается положительным, укорочение — отрицательным. Значение  $\nu$  для всех материалов колеблется в пределах  $0 < \nu < 0,5$ , а для большинства материалов — от 0,25 до 0,35/

Зная  $\varepsilon'$ , можно определить полное поперечное сужение или расширение стержня  $\Delta b$

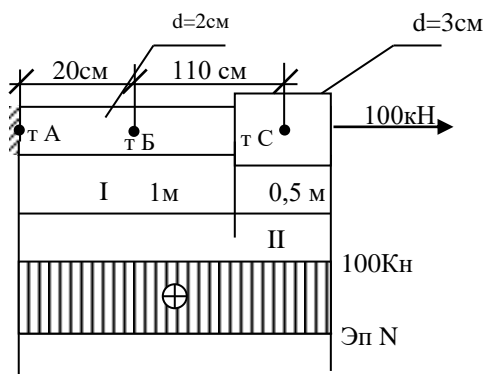
$$\varepsilon' = \Delta b / b,$$

$$\Delta b = b - b_1$$

где  $b$  — первоначальный поперечный размер стержня;

$b_1$  — поперечный размер стержня после деформации.

Материал	$\nu$	Материал	$\nu$
Сталь	0,25 – 0,33	Свинец	0,45
Медь	0,31 – 0,34	Латунь	0,32 – 0,42
Бронза	0,32 – 0,35	Алюминий	0,32 – 0,36
Чугун	0,23 – 0,27	Цинк	0,21
Стекло	0,25	Камень	0,16 – 0,34
Бетон	0,08 – 0,18	Каучук	0,47
Пробка	0	Фанера	0,07
Целлулоид	0,39		



Задача (Самостоятельно)

Дан ступенчатый Алюминиевый стержень рассчитать как переместятся т А, Б,С после приложения нагрузки в 100 кН найти реакцию опоры

Решение

Найдем реакцию опоры спроецировав все силы на ось х

$$R = 100 \text{ кН}$$

Построим эпюру продольных сил N

Абсолютное перемещение крепления рассчитаем по ф-ле

$$\Delta l = Nl / (EA)$$

$$A_{I \text{ уч}} = \Pi r^2 = 3,14 * 1^2 = 3,14 \text{ см}^2$$

$$A_{II \text{ уч}} = \Pi r^2 = 3,14 * 2,25 = 7,07 \text{ см}^2$$

$$E_{\text{стали}} = 0,675 * 10^5 \text{ МПа} = 0,675 * 10^4 \text{ кН/см}^2$$

Перемещение тА

$$\Delta l = 100 * 0 / (0,675 * 10^4 * 3,14) = 0 \text{ см}$$

Отсюда вывод перемещение в заделке отсутствует.

Перемещение т Б

$$\Delta l = 100 * 20 / (0,675 * 10^4 * 3,14) = 0,0943 \text{ см}$$

Перемещение т С

Перемещение тС разложим на 2 перемещения (т.к. участки разной площади)

$$\Delta l = 100 * 100 / (0,675 * 10^4 * 3,14) + 10 * 100 / (0,675 * 10^4 * 7,07) = 4,718 + 0,02 = 4,73 \text{ см}$$

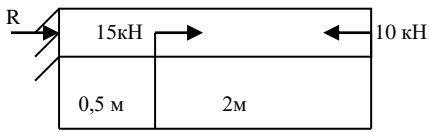
### **Построение эпюр в статически неопределимых балках при центральном растяжении-сжатии**

До сих пор мы решали задачи в которых нахождение реакций опор осуществлялось при помощи уравнений равновесия.  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M = 0$

При центральном растяжении мы используем 1 уравнение равновесия  $\Sigma F_x = 0$ , так как в рассматриваемых ранее случаях в системе лишь 1 реакция (для нахождения 1 неизвестной используется 1 уравнение)

Рассмотрим типовую задачу на центральное растяжение

## Пример



Определить реакцию опоры в невесомом стержне

Решение

Найдем реакцию опоры спроецировав все силы на ось  $x$

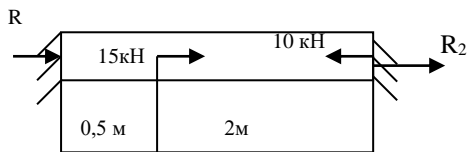
$$R + 15 - 10 = 0$$

$R = -5$  – реакция направлена в другую сторону.

Из задачи видно, что в данном случае реакция опоры 1 мы использовали 1 уравнение равновесия  $\sum F_x = 0$

Однако бывают ситуации, когда реакций опор несколько

## Пример



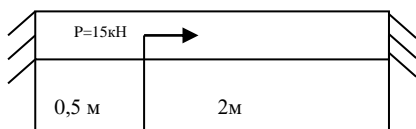
В данном случае 2 реакции опоры уравнение статики мы можем использовать только одно  $\sum F_x = 0$ .

2 неизвестных при 1 уравнении решение невозможно.

**Задачи, в которых нахождение реакций опор невозможно при помощи уравнений статики, называются статически неопределимыми**

Для решения статически неопределимых задач необходимо получить столько дополнительных уравнений, сколько имеется лишних неизвестных (т. е. сколько раз статически неопределима задача). Эти дополнительные уравнения получают из рассмотрения деформации системы — составляют сначала условие совместности деформаций.

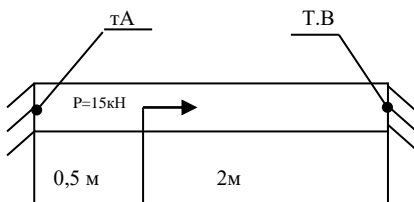
## Пример



Построить эпюру внутренних сил  $N$  в статически неопределимой медной балке. Если известно, что балка прямоугольной формы со сторонами 2\*3 см

## Решение

В данной системе перемещение  $t_A$  и  $t_B$  невозможно (перемещение в заделке отсутствует доказано



$$\text{Т.е. } \Delta l_{t,A} = 0$$

$$\Delta l_{t,B} = 0$$

} Условие совместности

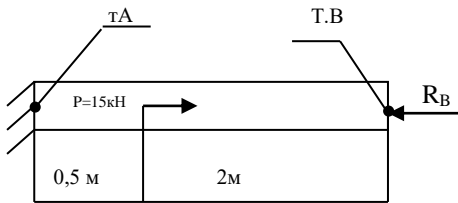
ранее)

Рассмотрим любую из точек например  $t_B$ . Так как перемещение в  $t_B$  отсутствует то препятствует данному перемещению реакция опоры в  $t_B$ .

Заменим заделку в  $t_B$  внешней пассивной силой (реакцией)  $R_B$



найдем перемещение т В используя формулу



$$\Delta l = Pl / (EA)$$

$$A = 2 * 3 = 6 \text{ см}^2$$

$$E = 1 * 10^4 \text{ КН/см}^2$$

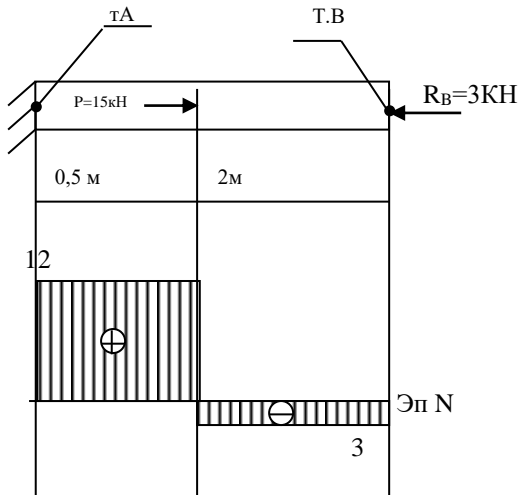
$$\Delta l = P * 50 / AE - R_B * (50 + 200) / A * E = 0$$

$$15 * 50 / 6 * 10^4 - R_B * 250 / 6 * 10^4 = 0$$

$$250 R_B = 75$$

$$R_B = 3 \text{ КН}$$

Строим эпюры

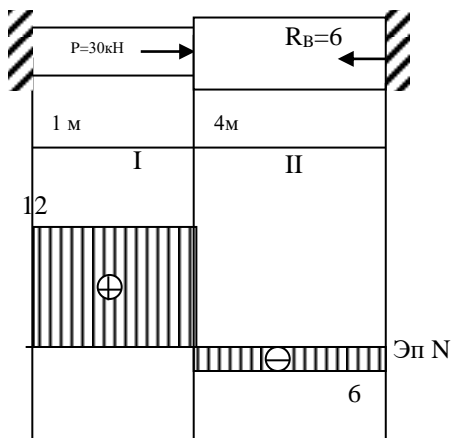


Задача самостоятельно

Построить эпюры в статически неопределимой круглой алюминиевой ступенчатой балке

Диаметр 1 ступени 10 см, 2-й 16 см Определить чему равны нормальные напряжения  $\sigma$  на

каждом участке



$$A_I = 3.14 * 5^2 = 78.5 \text{ см}^2$$

$$A_{II} = 3.14 * 8^2 = 201 \text{ см}^2$$

$$E = 0,675 * 10^5 \text{ МПа} = 0,675 * 10^4 \text{ КН/см}^2$$

$$\Delta l = Pl / (EA)$$

$$\Delta l = P * 100 / AE - R_B * (100 + 400) / A * E = 0$$

$$3000 / 0,675 * 10^4 - R_B * 500 / 0,675 * 10^4 = 0$$

$$500 R_B = 3000$$

$$R_B = 6 \text{ КН}$$

Участок I

$$\sigma = N / A.$$

$$\sigma = 12 / 78.5 = 0.15 \text{ КН/см}^2$$

Участок II

$$\sigma = N/A.$$

$$\sigma = 6/201 = 0.03 \text{ кН/см}^2$$

## Лекция 8

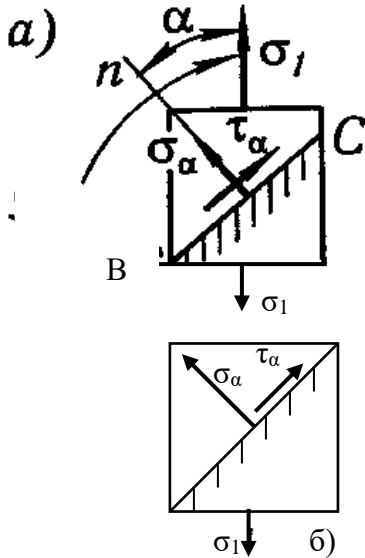
## НАРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА

## Определение напряжений в наклонном сечении

До сих пор мы определяли напряжения только в сечении перпендикулярном оси стержня

Для полного суждения о прочности материала необходимо уметь определять напряжения, действующие по любому наклонному сечению растянутого (сжатого) элемента

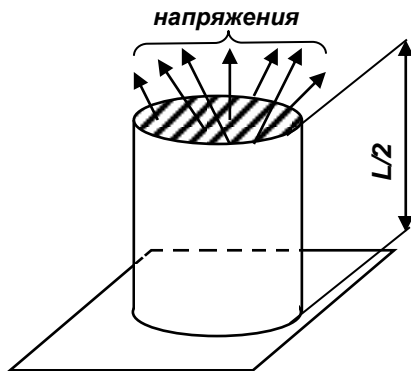
Предположим что нормальные напряжения  $\sigma_1$  нам известны.  $\sigma_1 = N/A$



Определим напряжения, возникающие в наклонном сечении  $BC$ , нормаль которого повернута на угол  $\alpha$  к направлению  $\sigma_1$ . За положительное направление отсчета угла  $\alpha$  примем направление, обратное движению часовой стрелки.

Обозначим:  $A$  — площадь сечения, перпендикулярного оси стержня;  $A_\alpha$  — площадь наклонного сечения  $BC$ , при этом

$$A_\alpha = A / \cos \alpha.$$



Так как напряжения в теле возникают разнонаправлено, то эти напряжения можно разложить на 2 составляющие  $\sigma$  и  $\tau$  в любой, в том числе и наклонной плоскости

Разложим напряжения действующие в элементе на нормальные и касательные по отношению к наклонной плоскости  $BC$  нормальные  $\sigma_\alpha$  и касательные  $\tau_\alpha$

Отсечем нижнюю часть по плоскости  $BC$

Так как элемент находится в равновесии (рис б), то сумма всех сил действующих в элементе равна 0

Проецируем внутренние сосредоточенные силы на направление  $\sigma_\alpha$

$$N_\alpha - N \cos \alpha = 0 \quad (\text{должно быть } N_\alpha + N \cos \alpha = 0)$$

$$\text{При } \sigma = N/A, \quad N = \sigma \cdot A$$

Тогда  $\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \cos \alpha = 0$  так как  $\sigma_1$  нам известно, а  $A_\alpha = A / \cos \alpha$ , то

$$\sigma_\alpha A / \cos \alpha - \sigma_1 A \cos \alpha = 0$$

$$\sigma_{\alpha} A / \cos \alpha = \sigma_1 A \cos \alpha$$

откуда

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha \quad (a)$$

Аналогично и найдем  $\tau_{\alpha}$

Проецируя силы на направление  $\tau_{\alpha}$  получаем

сумма  $\tau$  по площади как и у  $\sigma$  при  
определении N

$$\tau_{\alpha} A_{\alpha} - \sigma_1 A \sin \alpha = 0 \quad (б)$$

При  $A = A_{\alpha} \cos \alpha$  получим  $\tau_{\alpha} A_{\alpha} - \sigma_1 A_{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha = 0 \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$\tau_{\alpha} A_{\alpha} = 0,5 \sigma_1 A_{\alpha} \sin 2\alpha = 0,5 \sigma_1 A_{\alpha} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = 0,5 \sigma_1 \sin 2\alpha$$

Из формулы (а) следует, что максимального значения нормальные напряжения достигают при  $\alpha = 0$ , т. е. в сечении, перпендикулярном оси стержня.

Из формулы (б) следует, что при  $\alpha = 0$  касательное напряжение равно нулю.

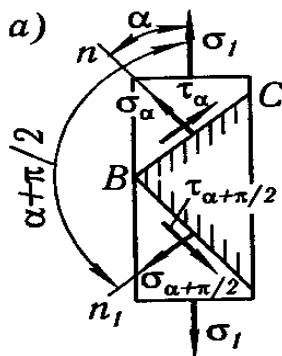
Из формул (а) и (б) видно, что при  $\alpha = 90^{\circ}$   $\sigma = 0$  и  $\tau = 0$ .

Таким образом, в продольных сечениях нет ни нормальных, ни касательных напряжений.

Как уже было отмечено, площадки, на которых нет касательных напряжений, называются главными площадками, а нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, — главными напряжениями.

Следовательно, нормальное напряжение в поперечном сечении растянутого или сжатого стержня есть главное напряжение.

Из формулы (б) видно также, что максимальное касательное напряжение имеет место в сечении под углом  $\tau = 45^{\circ}$  и равно половине главного напряжения.



### Закон парности касательных напряжений

Определим нормальные и касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Для площадки, наклоненной под углом  $\alpha$ , по формулам (а) и (б) имеем

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = 0,5 \sigma_1 \sin 2\alpha$$

Для взаимно перпендикулярной площадки при значении угла  $\alpha + \pi/2$  нормальные и касательные напряжения можно определить или непосредственно из условия равновесия верхней или нижней части стержня (рис.), или по формулам (а) и (б) с заменой  $\alpha$  на  $\alpha + \pi/2$ .

Применяя формулы (а) и (б), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha+\pi/2} &= \sigma_1 \cos^2(\alpha+\pi/2) = \sigma_1 \sin^2 \alpha \\ \tau_{\alpha+\pi/2} &= 0,5 \sigma_1 \sin 2(\alpha+\pi/2) = -0,5 \sigma_1 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Анализируя полученные результаты, видим, что, во-первых,

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_{\alpha+\pi/2} = \sigma_1 \sin^2 \alpha$$

$$\sigma_{\alpha+\pi/2} + \sigma_{\alpha} = \sigma_1 - \text{т.к. } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

т. е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам постоянна и равна главному напряжению;

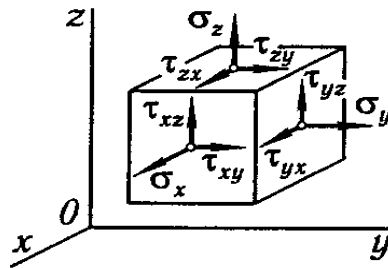
$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha+\pi/2}$$

т.е. на двух взаимно перпендикулярных площадках действуют равные по величине и обратные по знаку касательные напряжения (закон парности или взаимности касательных напряжений).

### Напряженное состояние в точке тела

Как мы уже знаем полные напряжения раскладываются на нормальные и касательные. Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определенный физический смысл. Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться (растяжение сжатие). Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости рассматриваемого сечения (сдвиг).

Если мысленно вырезать вокруг какой нибудь точки тела элемент в виде бесконечного малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рис



Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через какую-либо точку тела, называется **напряженным состоянием** в данной точке.

Если по граням кубика действуют одни только нормальные напряжения, то они называются **главными**, а площадки, на которых они действуют, называются **главными площадками**.

Можно доказать, что в каждой точке напряженного тела существуют три главные взаимно перпендикулярные площадки.

Главные напряжения обозначают  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При этом большее (с учетом знака) главное напряжение обозначается  $\sigma_1$ , а меньшее (с учетом знака) обозначается  $\sigma_3$ .

$$\text{т.е. } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Различные виды напряженного состояния классифицируются в зависимости от числа возникающих главных напряжений.

Если отличны от нуля все три главных напряжения, то напряженное состояние называется **трехосным** или **объемным** (рис.).

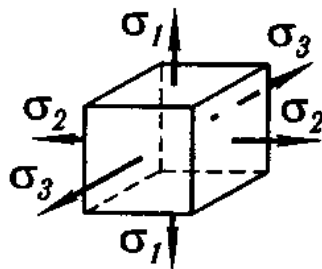


Рис. I.15

Если равно нулю одно из главных напряжений, то напряженное состояние называется **двухосным** или **плоским**.

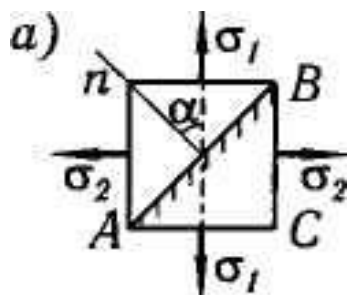
Если равны нулю два главных напряжения, то напряженное состояние называется **одноосным** или **линейным**.

Зная напряженное состояние в любой точке детали, можно оценить прочность этой детали.

## Лекция 9

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ) В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

Рассмотрим более общий случай плоского (двухосного) напряженного состояния, когда отличны от нуля два главных напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис.).



Как уже было отмечено в предыдущей лекции, индексы у обозначений главных напряжений ставятся так, что соблюдается неравенство  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Положительный угол  $\alpha$  между направлением  $\sigma_1$  и нормалью к произвольной площадке будет отсчитываться против часовой стрелки.

Между направлением напряжения  $\sigma_2$  и площадкой АВ угол равен  $\alpha + \pi/2$ .

Напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  в наклонном сечении АВ определим по формулам (а) и (б), суммируя напряжения от действия  $\sigma_1$  с напряжениями от действия  $\sigma_2$  (при замене угла  $\alpha$  на угол  $\alpha + \pi/2$ ).

В результате получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 (\alpha + \pi/2), \text{ откуда}$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = 0,5\sigma_1 \sin 2\alpha + 0,5\sigma_2 \sin 2(\alpha + \pi/2), \text{ откуда}$$

$$\tau_\alpha = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha.$$

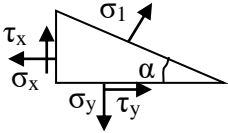
Из формулы видно, что максимальные касательные напряжения равны полуразности главных напряжений

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$$

и имеют место в сечениях, наклоненных под одним и тем же углом к направлениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , т. е. при  $\alpha = 45^\circ$ .

## Определение главных напряжений в плоском напряженном состоянии

Дано плоское напряженное состояние с известными напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ . Определить положение главных площадок, значения главных напряжений, и максимальных касательных напряжений



Главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  найдем по следующей формуле

$$\sigma_{1\text{либо}2} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \right]$$

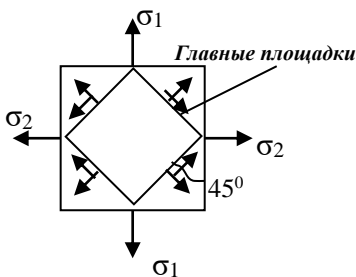
Положение главных площадок можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$\alpha_1$  – угол наклона между площадкой на которой действует напряжение  $\sigma_y$  и  $\sigma_1$

Для определения главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  используют следующую формулу

Наибольшие и наименьшие касательные напряжения образуются на площадках под углом в 45 градусов с главными площадками и называются такие площадки – **площадками сдвига**



$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}$$

## Исследование напряженного состояния с помощью круга Мора

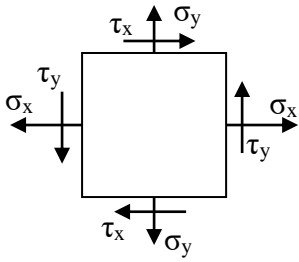
### Плоское напряженное состояние

Если известны напряжения действующие по 2 взаимно перпендикулярным площадкам в точке, то исследование данного напряженного состояния достаточно удобно осуществлять с помощью круга Мора.

Возьмем плоский элемент с известными напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_x$ ,  $\tau_y$



Для создания круга Мора

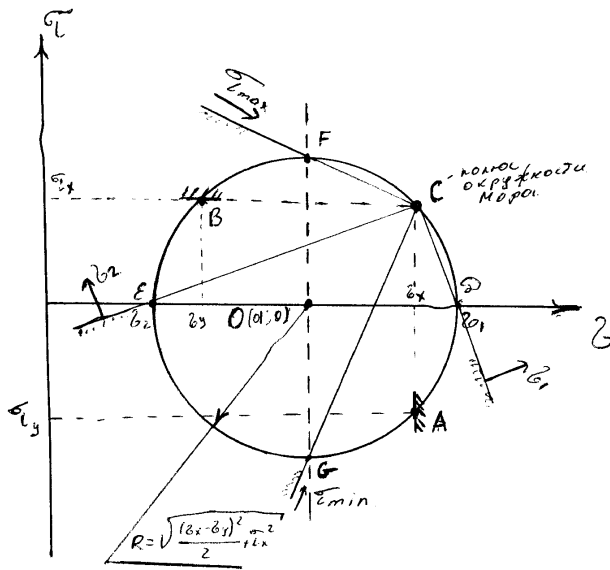


1 Найдем радиус окружности по формуле

$$R = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_x^2}$$

2 Найдем положение абсциссы окружности  $a$  (ордината всегда равна 0)

$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



3 Прочертим найденную окружность в координатах  $\sigma$ - $\tau$

4 На найденной окружности отложим точки А с координатами  $(\sigma_x; \tau_y)$  и В  $(\sigma_y; \tau_x)$

5 В найденных точках А и В отложим площадки параллельные граням искомого элемента.

6 Продолжив направление площадок до пересечения с окружностью найдем полюс С.

С помощью полюса возможно нахождение положения площадок при различных значениях напряжений

### **Нахождение напряжений на главных площадках и их положения с помощью круга Мора**

На главных площадках касательные напряжения равны 0, следовательно точки Е и D, отображают значения главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в элементе.

Соединив полюс С с точками Е и D найдем положение главных площадок.

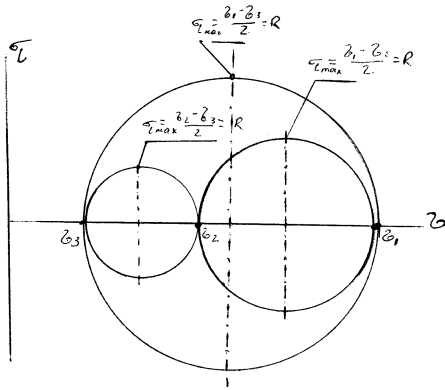
Для нахождения экстремальных касательных напряжений берутся соответственно верхняя F и нижняя G точки круга Мора. Эти значения и являются экстремальными напряжениями

Положение площадок на которых действуют экстремальные касательные напряжения находятся путем соединения полюса С с точками F и G.

### **Объемное напряженное состояние**

объемное напряженное состояние так же можно отобразить с помощью кругов Мора. Однако в плоскости координат  $\sigma$ - $\tau$  строятся 3 круга.

Рассмотрим построение кругов Мора для объемного напряженного состояния если заданы только главные напряжения те  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$



При этом помним что на главных площадках  $\tau = 0$   
Следовательно круги мора будут иметь следующий вид

## Гипотезы прочности

Позволяют определять прочность элементов материала в сложном напряженном состоянии путем нахождения эквивалентных напряжений равных напряжениям одноосного растяжения в связи с чем возникает возможность сравнения их с допускаемыми напряжениями полученными экспериментально

Существует несколько гипотез каждая из которых построена на некоторых допущениях в связи с чем при использовании гипотез в расчетах требуется учитывать специфику их применения.

### I гипотеза

Опасное состояние возникает тогда, когда наибольшее растягивающее или сжимающее напряжение достигает опасного значения

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma_{\text{раст}}]$$

т.е.  $\sigma_2, \sigma_3$  – не учитываются;

$\sigma_1$  – растягивающее (обязательно положительное)

В случае если сжимающее  $|\sigma_3| \gg |\sigma_1|$  гипотезу прочности переписывают как

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_3 \leq [\sigma_{\text{сж}}]$$

Данная теория не учитывает напряжения  $\sigma_2, \sigma_3$ , что может привести к значительным отклонениям расчетных и опытных данных

### II гипотеза

Опасное состояние материала возникает тогда, когда наибольшее удлинение достигает опасного значения

т.е.

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} \leq [\varepsilon]$$

из данного выражения получена следующая формула

$$\sigma_{\text{экв}}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

Данная теория не объясняет разрушения образца при одноосном сжатии  
Применяется при расчете хрупких материалов.

### **III гипотеза**

Опасное состояние материала возникает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает опасного значения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau]$$

при одноосном растяжении сжатии  $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$  и лежит под углом 45

градусов к  $[\sigma]$

Откуда

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Данная теория объясняет сопротивление материала всестороннему сжатию но не объясняет разрушения при всестороннем растяжении. Отсутствие  $\sigma_2$  в выражении ает расхождение в 10-15 % с опытными данными.

Применяется для пластичных материалов

### **IV гипотеза**

В качестве критерия возникновения опасного состояния материала принимается величина удельной потенциальной энергии

Т.е.

$$U_{\phi} \leq [U_{\phi}]$$

На основании этой формулы получено следующее выражение

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

Данная теория учитывает все три главных напряжения. Как и III теория объясняет высокую прочность материала при всестороннем сжатии но всестороннее растяжение не объясняет.

### **Гипотеза прочности Мора**

На основании построений кругов Мора было выведено следующее выражение оценивающее напряженное состояние как хрупких так и пластичных материалов.

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{сж}]} \sigma_3 \leq [\sigma_p]$$

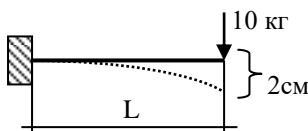
Недостатком данной гипотезы является отсутствие  $\sigma_2$ , в выражении что соответственно уменьшает точность расчета на 10-15%.

Достоинством возможность применения как для хрупких так и для пластичных материалов При расчете пластичных материалов  $[\sigma_p]=[\sigma_{сж}]$  данная гипотеза идентична III гипотезе прочности

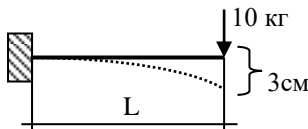
#### 4. Геометрические характеристики сечения

Рассмотрим следующую задачу

Даны две балки одинаковой длины к концам которых подвешен одинаковый груз массой 10 кг. При этом 1 балка прогнулась на величину 2 см, а другая на величину 3 см. Определить при каких условиях возможно такое отклонение.



1) Различный материал (резина и дерево сопротивляется нагрузкам по разному.



2) Различная площадь поперечного сечения

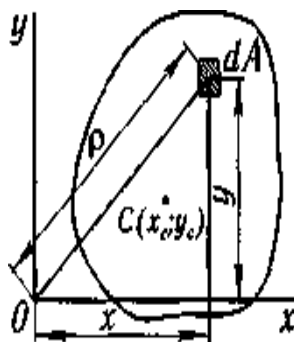
3) Форма поперечного сечения (сопротивление при расположении ба [и таким [и образом даже

при одинаковой форме сечения различно)

В уравнениях определения деформации стержня при изгибе в качестве фактора учитывающего свойства материала используется выше изученный модуль упругости  $E$ , за форму сечения и его размеры отвечают различные геометрические характеристики сечения такие как: статический момент, момент инерции, момент сопротивления.

##### 4.1 Статический момент сечения.

Статическим моментом  $S_x$  сечения фигуры относительно какой-либо оси  $x$  (рис. ) называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида



$$S_x = \int_A y dA \quad (1)$$

где  $y$  — расстояние от элементарной площадки

$dA$  до оси  $Ox$ .

Статический момент применяется для определения центра тяжести сечения

Единицей статического момента является единица длины в третьей степени, обычно  $\text{см}^3$ .

Статический момент может быть положительным, отрицательным и, в частности, равным нулю.

Если отождествить площадь с силой, действующей перпендикулярно плоскости чертежа, то интеграл [IV. 1] можно рассматривать как сумму моментов сил относительно оси  $Ox$ . По известной из теоретической механики теореме о моменте равнодействующей можно написать

$$S_x = \int_A y dA = Ay_c \quad (2)$$

где  $A$  — площадь всей фигуры (равнодействующая);

$y_c$  — расстояние от центра тяжести фигуры до  $Ox$ .

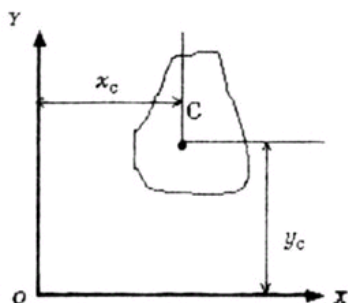
$S_x$  и  $S_y$  — бывают больше меньше и равными 0

Из формулы (2) следует формула определения ординаты центра тяжести.

$$y_c = S_x / A \quad (3)$$

Аналогично, статический момент относительно оси  $Oy$

$$x_c = S_y / A \quad (4)$$



Центр тяжести обладает тем свойством, что если тело опереть в этой точке, то оно будет находиться в равновесии.

Если оси  $x$  и  $y$  проходят через центр тяжести фигуры, то статический момент относительно этих осей равен нулю. Такие оси называются **центрными осями**.

Если сечение можно представить в виде отдельных простых фигур (квадратов, треугольников и т. д.), для которых известны положения центров тяжести, то в этом случае статический момент всей фигуры можно получить, как сумму статических моментов этих простых фигур.

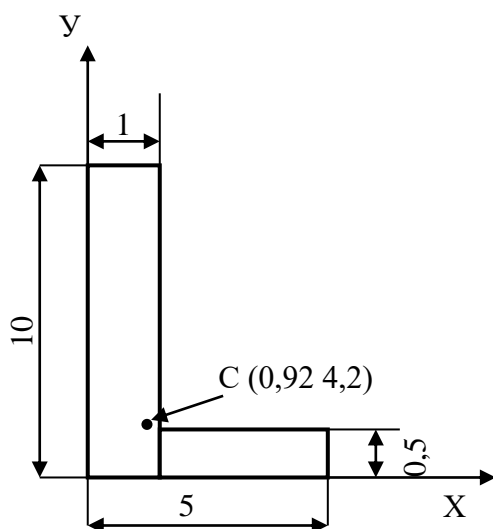
$$S_{\text{сложнсечения}} = \sum S_{\text{прост. фигур}}$$

Если фигура имеет ось симметрии, то последняя всегда проходит через центр тяжести фигуры, а потому статический момент фигуры относительно оси симметрии всегда **равен нулю**.

## 4.2 Определение центра тяжести плоского сечения

Дан брус Г-образного сечения . Найти центр тяжести сечения.

*Решение:*



**1 Разбиваем сложное сечение на два простых - прямоугольники.** И проводим вспомогательные оси X и Y. По формуле 4 и 3 найдем координаты центра тяжести.

$$Y_c = S_x / A$$

### 2 Найдем ординату сложного сечения

Общий статический момент сложного сечения равен сумме статических моментов простого сечения.

Найдем общий статический момент.

$$S_x = S_x^{\text{прямоуг}^1} + S_x^{\text{прямоуг}^2}$$

$$S_x^{\text{прямоуг}^1} = A_1 * Y_1$$

$A_1$  - площадь прямоугольника 1

$Y_1$  – расстояние до центра тяжести прямоугольника

$$S_x^{\text{прямоуг}^1} = (0,5 * 4) * 0,25 = 0,5 \text{ см}^3$$

$$S_x^{\text{прямоуг}^2} = A_2 * Y_2 = (10 * 1) * 5 = 50 \text{ см}^3$$

$$S_x = 50 + 0,5 = 50,5 \text{ см}^3$$

$$Y_c = 50,5 / (0,5 * 4 + 10 * 1) = 4,2 \text{ см}$$

### 3 Найдем абсциссу сложного сечения.

$$X_c = S_y / A$$

$$S_y = S_y^{\text{прямоуг}^1} + S_y^{\text{прямоуг}^2}$$

$$S_y^{\text{прямоуг}^1} = A_1 * X_1$$

$A_1$  - площадь прямоугольника 1

$X_1$  – расстояние до центра тяжести прямоугольника

$$S_y^{\text{прямоуг}^1} = (0,5 * 4) * 3 = 6 \text{ см}^3$$

$$S_y^{\text{прямоуг}^2} = A_2 * Y_2 = (10 * 1) * 0,5 = 5 \text{ см}^3$$

$$S_y = 6 + 5 = 11 \text{ см}^3$$

$$X_c = 11 / (0,5 * 4 + 10 * 1) = 0,92 \text{ см}$$

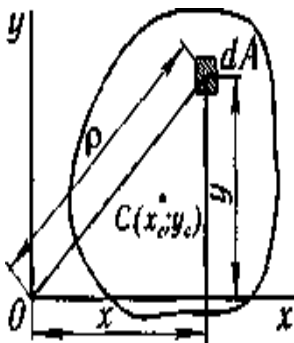
Центр тяжести находится в точке  $C$  соответствующей координатам  $(0,92; 4,2)$

4 Отметим центр тяжести на рисунке

## Лекция 10

### Осевые моменты инерции сечения

Осевым моментом инерции сечения называется геометрическая характеристика, численно равная интегралу:



относительно оси  $x$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

относительно оси  $y$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

где  $y$  — расстояние от элементарной площадки  $dA$  до оси  $x$  (см.

рис.);

$x$  — расстояние от элементарной площадки до оси  $y$ ;

Моменты инерции позволяют определить сопротивление сечения деформации

$I_x$  и  $I_y$  — всегда больше 0

### Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции сечения называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$I_p = I_0 = \int_A p^2 dA$$

где  $p$  — расстояние от площадки  $dA$  до точки (полюса) (см. рис.), относительно которой вычисляется полярный момент инерции.

Данная характеристика применяется при расчете элементов на прочность и жесткость при кручении.

Центробежным моментом инерции  $I_{xy}$  сечения называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$I_{xx} = \int_A xy dA$$

$$I_{xy} = xyA$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю.

Если взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$  или одна из них являются осями симметрии фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю.

Главные оси инерции – оси, относительно которых значения моментов инерции носят экстремальный характер (может быть множество).

Главные оси проходящие через центр тяжести сечения называются главными центральными осями (может быть только 2).

## Моменты инерции простых сечений

### 1 Прямоугольник

Осевой момент инерции для прямоугольника равен

$$I_{x0} = bh^3/12$$

Где  $h$  - высота прямоугольника

$b$  – основание.

### 2 Круг

$$I_{x0} = I_{y0} = \pi r^4/4 = \pi d^4/64$$

где  $r$  и  $d$  – радиус и диаметр круга соответственно

полярный момент инерции

$$I_p = \pi r^4/2 = \pi d^4/32$$

### 3. Кольцо

Осевой момент инерции в этом случае равен разности моментов инерции внешнего и внутреннего кругов:



$$I_{x0} = I_{y0} = \pi D^4/64 - \pi d^4/64$$

Где  $D$  – внешний диаметр кольца.

$d$  – внутренний диаметр кольца

полярный момент инерции

$$I_{x0} = I_{y0} = \pi D^4/32 - \pi d^4/32$$

#### 4 Треугольник

Формула для осевого момента центральной оси треугольника имеет следующий вид.

$$I_{x0} = bh^3/36$$

где  $h$  - высота треугольника

$b$  – основание треугольника

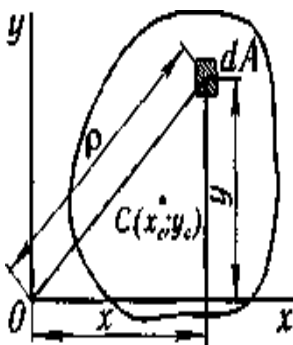
Формула для осевого момента оси проходящей через основание

$$I_{x0} = bh^3/12$$

### Основные теоремы о моментах инерции

#### Теорема 1

#### *Зависимость между полярным моментом инерции и осевыми моментами инерции*



Полярный момент инерции относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

$$I_p = I_x + I_y$$

$$I_p = I_0 = \int_A p^2 dA$$

Из теоремы Пифагора  $\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y$

### **Теорема 4 Моменты инерции сложных фигур**

Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее составных частей:

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + \dots$$

Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла

$$\int_A y^2 dA = \int_{A1} y^2 dA + \int_{A2} y^2 dA + \dots,$$

где  $A = A1 + A2 + \dots$

Таким образом, для вычисления момента инерции сложной фигуры надо разбить ее на ряд простых фигур, вычислить моменты инерции этих фигур и затем просуммировать эти моменты инерции.

Указанная теорема справедлива также и для центробежного момента инерции.

### **Теорема 2**

#### **Свойства оси симметрии сечения**

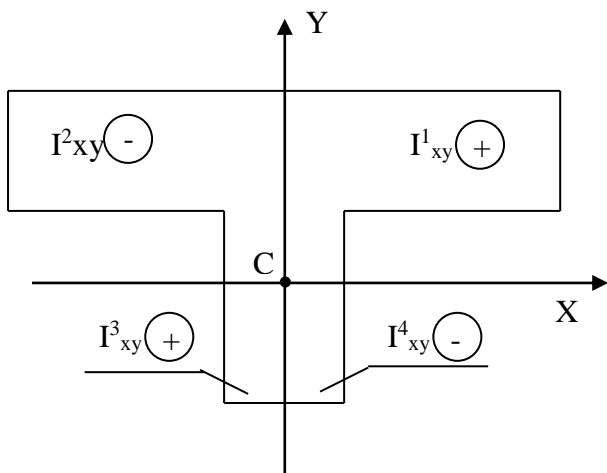
Ось Y ось симметрии сечения

Ось X – центральная

Найдем центробежные моменты инерции 4 частей сечения

Центробежный момент инерции I четверти сечения положителен т.к.  $I^1_{xy} = x * y * A_1$

Где - A площадь площадь верхней правой части сечения



II четверть  $I^2_{xy}$  – отрицателен.  $I^2_{xy} = (-x) * y * A_2$

III четверть  $I^3_{xy}$  – положителен.  $I^3_{xy} = (-x) * (-y) * A_3$

IV четверть  $I^4_{xy}$  – отрицателен.  $I^4_{xy} = x * (-y) * A_4$

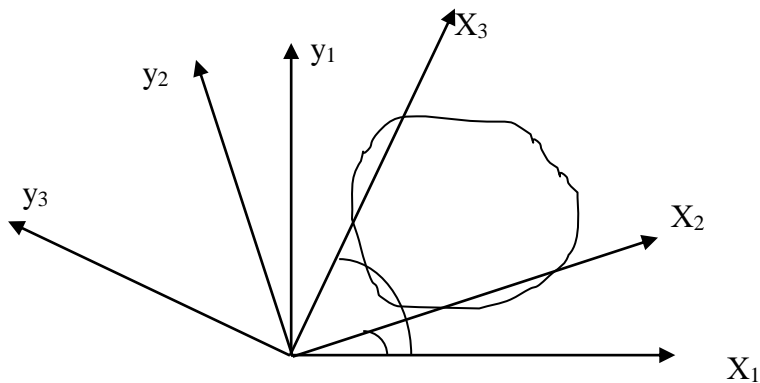
$$I_{\text{сечения}}_{xy} = I^1_{xy} - I^2_{xy} + I^3_{xy} - I^4_{xy} = 0$$

Центробежный момент инерции относительно осей симметрии всегда равен 0.  $I_{xy} = 0$

Ось симметрии всегда является главной осью инерции сечения.

### Теорема 3 О главных осях инерции

В любом несимметричном сечении есть главные оси инерции.



Рассмотрим положение осей  $x_1 y_1$ . Осевой момент инерции фигуры  $I_{x_1}$  больше 0 (так как фигура лежит в положительной плоскости (см. предыдущую теорему)).

Рассмотрим положение осей  $x_2 y_2$ . Осевой момент инерции фигуры  $I_{x_2}$  больше 0 (так как большая часть фигуры, а следовательно и центр тяжести лежит в положительной плоскости)

Рассмотрим положение осей  $x_3 y_3$ . Осевой момент инерции фигуры  $I_{x_3}$  меньше 0 (так как большая часть фигуры, а следовательно и центр тяжести лежит в отрицательной плоскости)

Значит между этими осями существует такое положение осей, при котором осевой момент инерции фигуры  $I_{x_0}$  равен 0

Следовательно, в любой несимметричной фигуре есть главные оси инерции.

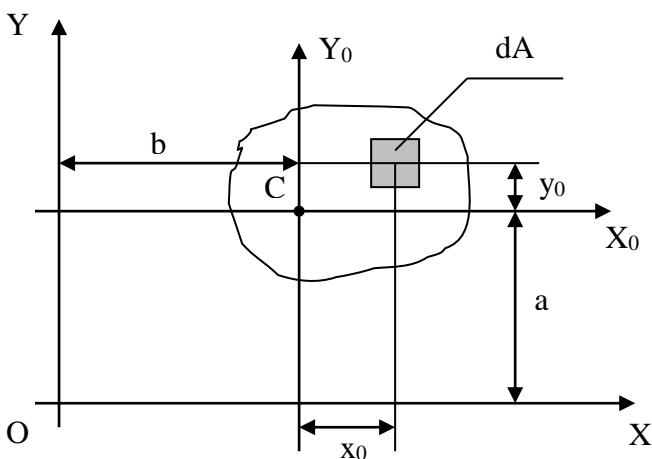
Моменты инерции прокатных сечений (двутавров, швеллеров, уголков и т. д.) приводятся в таблицах сортамента.

### Лекция 11

**Теорема 4 О зависимости между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых центральная**

Тело расположено в системе координат  $x, y$ . Через центр тела в  $t$   $C$  проходят центральные оси  $y_0$  и  $x_0$  на расстоянии  $a$  от оси  $x$  и  $b$  от оси  $y$ .

Найти момент инерции площадки  $dA$



относительно оси X и оси Y.

$$I_x = \int_A (y_0 + a)^2 dA = \int_A (y_0^2 + 2ay_0 + a^2) dA = \int_A (y_0^2) dA + \int_A (2ay_0) dA + \int_A (a^2) dA =$$

$$= \int_A (y_0^2) dA + 2a \underbrace{\int_A (y_0) dA}_{S_{x0}=0 \text{ т.к. ось } x \text{ центральная}} + a^2 \int_A dA = I_{x0} + a^2 A$$

Т.е. момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

$$I_x = I_{x0} + Aa^2$$

$$I_y = I_{y0} + Ab^2$$

Из формулы (IV.10) видно, что момент инерции относительно центральной оси меньше, чем момент инерции относительно любой нецентральной оси, параллельной центральной.

Момент инерции относительно центральной оси называется центральным моментом инерции.

***Теорема 6 О зависимости между центробежными моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых центральная***

Рисунок и условие из предыдущей теоремы:

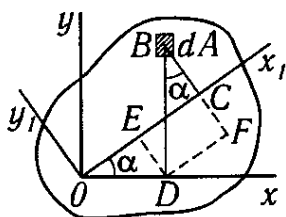
Найти Центробежный момент инерции  $I_{xy}$

$$I_{xy} = \int_A (x_0 + b)(y_0 + a) dA = \int_A x_0 y_0 dA + \underbrace{\int_A x_0 a dA}_{S_x=0} + \underbrace{\int_A b y_0 dA}_{S_y=0} + \int_A ab dA = I_{x_0 y_0} + baA$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + baA$$

### Теорема 7 Изменение моментов инерции при повороте осей

Сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей не меняется при их повороте.



$$I_x + I_y = I_{x1} + I_{y1}$$

Для вычисления центробежного момента инерции относительно осей  $x$  и  $y$  по известным осевым моментам инерции относительно осей

$x_1, y_1$ , используется формула

$$I_{x1} + I_{y1} = (I_x - I_y) \cos 2\alpha - 2I_{xy} \sin 2\alpha$$

### Теорема 8 О главных осях и главных моментах инерции

Оси называют **главными**, если осевой момент инерции относительно одной из них максимален, а относительно другой минимален

Положение осей относительно одной из которых осевой момент инерции максимален, а относительно другой — минимален, можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Главные оси инерции обладают 2 свойствами

- 1) Центробежный момент инерции относительно главных осей всегда равен 0
- 2) Осевые моменты инерции принимают экстремальные значения

Значения главных моментов инерции найдем из формул

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

Если фигура имеет ось симметрии, то она является одной из главных центральных осей, вторая проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно первой. Сказанное следует из того обстоятельства, что относительно оси симметрии и любой оси, ей перпендикулярной, центробежный момент инерции равен нулю.

### Моменты сопротивления сечения

Осевым моментом противления называется отношение момента инерции относительно данной оси, к расстоянию от оси от оси до наиболее удаленной точки сечения.

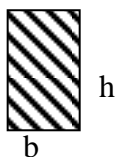
$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}$$

Полярным моментом сопротивления называется отношение полярного момента инерции к расстоянию от полюса до наиболее удаленной точки сечения.

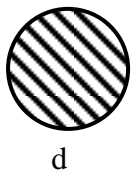
$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}$$

### Осевые и полярные моменты сопротивления для простых сечений



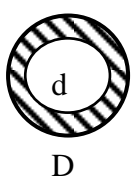
Прямоугольник

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \quad W_y = \frac{b^2h}{6}$$



Круг

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$$



Кольцо

$$W_x = W_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \quad W_\rho = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$$

### Рациональные формы поперечного сечения

Рассчитывая любую конструкцию инженер должен руководствоваться в первую очередь условиями прочности и экономичности.

#### 1) Условие прочности

Для балок из пластических материалов  $[\sigma_{\text{раст}}]=[\sigma_{\text{сжат}}]=[\sigma]$  В этом случае условие прочности при изгибе примет вид:

$$\sigma_{\text{max}} = \pm \frac{M_{\text{max}}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Условие прочности при сжатии выглядит так.

$$\sigma_{\text{max}} = \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

По данным формулам решается три типа задач

а) При заданной нагрузке и размерах поперечного сечения определить прочность сечения.

По формуле

$$\sigma_{\text{max}} = \pm \frac{M_{\text{max}}}{W_x} \leq [\sigma]$$

б) При заданной нагрузке и материале (известно  $[\sigma]$ ) определить размеры поперечного сечения

По формуле

$$W_x \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]}$$

в) При заданных размерах сечения и материале определить грузоподъемность сечения






По формуле

$$|M_{\text{max}}| \leq W_x [\sigma]$$

2) Кроме условия прочности балка должна удовлетворять и условию экономичности.

Наиболее экономичными являются такие формы поперечного сечения, для которых при наименьших затратах материала (наименьшая площадь поперечного сечения) получается наибольшая величина момента сопротивления.

В таблице приведем симметричные сечения с одинаковыми моментами сопротивления (одинаковой прочностью), и соотношение весов балок из этих сечений. Балки взяты одинаковой длины.

№16 				
1	2,01	3,58	3,89	2,78

Как видно из приведенной таблицы при равной прочности на сечение типа двутавр затрачивается наименьшее количество материала, данное сечение следует считать наиболее экономичным.

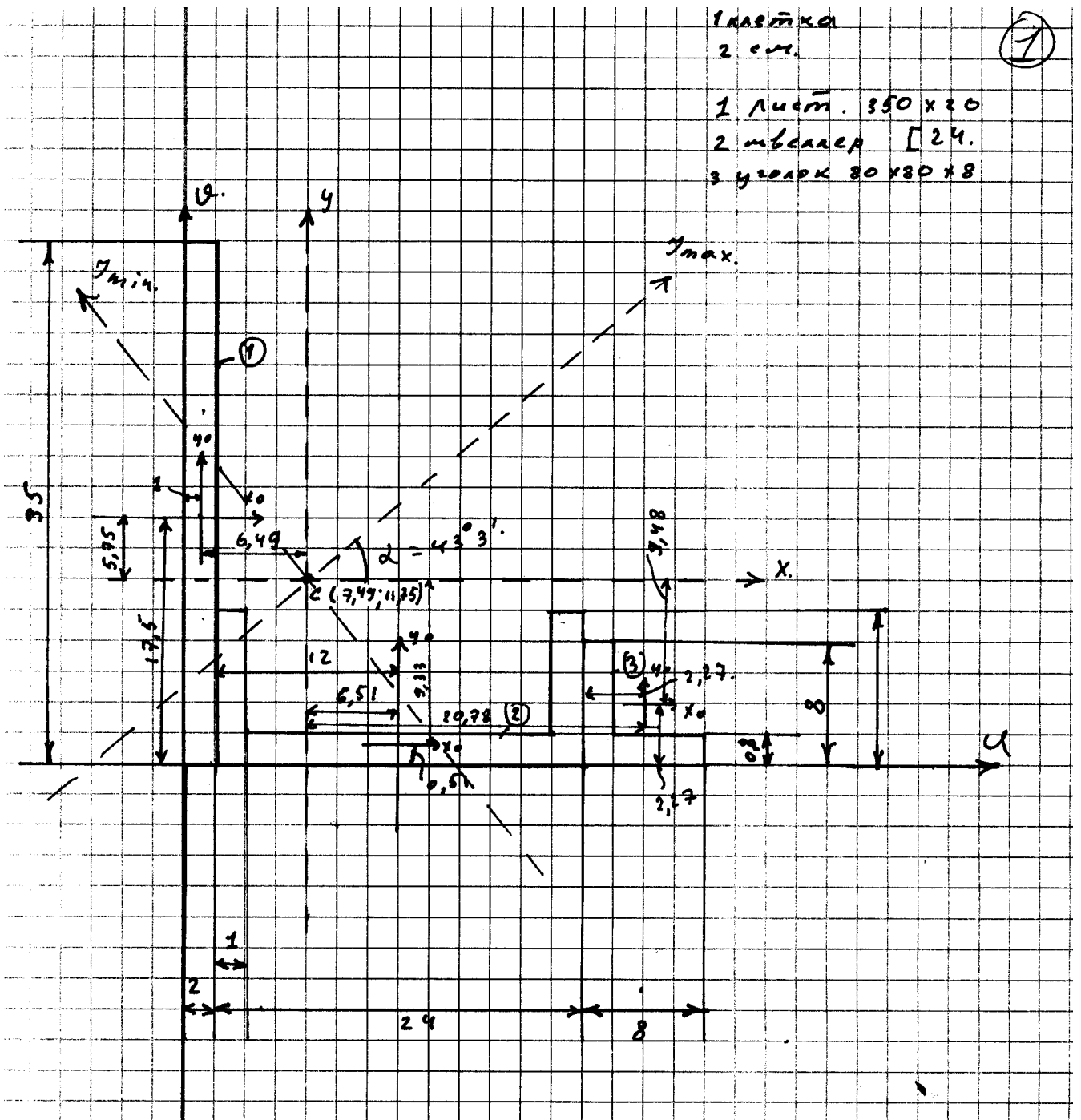
Наименее экономичным сечением является круг. При этом следует отметить, что по возможности круглое сечение следует заменять трубчатым. Эта мера при незначительном увеличении внешнего размера балки почти в два раза сокращает ее вес, а следовательно и стоимость.

Такую же тенденцию мы видим и при замене сплошного квадратного сечения корбчатым. Вес 1 метра балки сокращается с 3,58 до 2,78 ед. т.е. на треть.



## Лекция 12

## Определение моментов сопротивления сложного сечения



Исходные данные

а) Лист  $A_1 = 35 \cdot 2 = 70 \text{ см}^2$ ,

$$I_{x0} = \frac{bh^3}{12} \quad I_{x0} = \frac{2 \cdot 35^3}{12} = 7146 \text{ см}^4$$

$$I_{y0} = \frac{hb^3}{12} \quad I_{y0} = \frac{35 * 2^3}{12} = 23 \text{ см}^4,$$

б) **швеллер** (данные из сортамента),

$$A_2 = 30,6 \text{ см}^2 \quad I_{x0} = 208 \text{ см}^4 \quad I_{y0} = 2900 \text{ см}^4$$

в) **Уголок**,  $A_3 = 13,3 \text{ см}^2 \quad I_{x0} = I_{y0} = 73,4 \text{ см}^4,$

$$I_{\max} = 116 \text{ см}^4 \quad I_{\min} = 30,3 \text{ см}^6,$$

1, Определим положение центра тяжести сечения.

Для этого проведем в сечении произвольные оси U и V (в любом месте), и отметим центры тяжести составных частей

$$S_x = S_{ayda} = \sum y_i A_i,$$

а)

$$V_c = \frac{S_u}{\sum A_i} = \frac{S_u(1) + S_u(2) + S_u(3)}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{35 * 2 * 17,5 + 30,6 * 2,42 + 12,3 * 2,27}{70 + 30,6 + 12,3} = \frac{1326,9}{112,9} = 11,75 \text{ см}$$

$$U_c = \frac{S_v}{\sum A_i} = \frac{S_v(1) + S_v(2) + S_v(3)}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{35 * 2 * 1 + 30,6 * 14 + 12,3 * 28,27}{70 + 30,6 + 12,3} = \frac{870,71}{112,9} = 7,49 \text{ см},$$

Координаты центра тяжести в точке C (7,49; 11,75)

2, Проведем через центр тяжести центральные оси X и Y

3, Определим моменты инерции сечения относительно осей X и Y.

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)},$$

Определите моменты инерции относительно оси параллельных центральным осям по формуле

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = (I_x^{(1)} + A_1 y_1^2) + (I_x^{(2)} + A_2 y_2^2) + (I_x^{(3)} + A_3 y_3^2),$$

Где y - расстояние от центральной оси до центра тяжести фигуры

$$I_x = (7146 + 70 * 5,76^2) + (208 + 30,6 * 9,33^2) + (73,4 + 12,3 * 9,48^2) = 9460 + 2872 + 1179 = 13511 \text{ см}^4,$$

$$I_y = (23 + 70 * 6,49^2) + (2900 + 30,6 * 6,51^2) + (73,4 + 12,3 * 20,78^2) = 2971 + 4197 + 5385 = 12553 \text{ см}^4,$$

4, Рассчитаем центробежный момент инерции

Оси относительно которых один момент инерции max, а другой min, называются главными

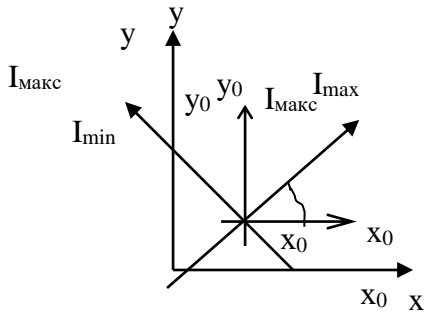
Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными осями. Главными центральными осями бывают только две.

Центробежный момент инерции  $I_{xy}$  относительно главных осей равен 0.

Оси симметрии всегда являются главными центральными осями.

У швеллера и листа  $I_{x_0y_0}=0$  т.к,  $I_{xy}$  относительно осей симметрии всегда равен 0.

У уголка оси расположены следующим образом (см. рис ) следовательно они не совпадают с главными и  $I_{x_0y_0} \neq 0$ ,



Найдем центробежный момент инерции уголка по формуле.

$$I_{x_0y_0} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} * \sin 2\alpha$$

$$I_{x_0y_0} = \frac{116 - 30,3}{2} * \sin(45^\circ * 2) = 42,85$$

Рассчитаем центробежный момент инерции всего сечения по формуле:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)},$$

$$I_{xy}^i = I_{x_0y_0} + A_i * y_i * x_i,$$

Где А- площадь фигуры сечения,

$I_{x_0y_0}$  - центробежный момент инерции относительно центра центральных осей,

X и Y-расстояние от центра тяжести сложного сечения до центра тяжести простой фигуры.

$$I_{xy} = (0 + 70 * 5,75 * (-6,49)) + (0 - 9,33) * 30,6 * 6,5 + (42,85 + 12,3 * 20,78 * (-9,48)) = -6851,$$

$I_{xy} \neq 0 \Rightarrow$  оси X и Y не главные.

5. Найдем положение главных центральных осей из фигуры, по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 * (-6851)}{13511 - 12553} = \frac{13702}{958};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 14,303,$$

$$2\alpha_0 = 86^\circ,6' \quad \alpha = 43,3$$

Ось  $I_{\max}$  образует наименьший угол с той осью, относительно которой момент инерции ( $I_x$ ,  $I_y$ ) больше.

Покажем на рисунке оси  $I_{\max}$   $I_{\min}$ .

6. Определим значения главных моментов инерции  $I_{\max}$   $I_{\min}$ .

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{4} + I_{xy}^2}$$

$$I_{\max/\min} = \frac{13511 + 12553}{2} \pm \sqrt{\frac{(13511 - 12553)^2}{4} + 6851^2} = 13032 \pm 6868$$

$$I_{\max} = 19900 \text{ см}^4$$

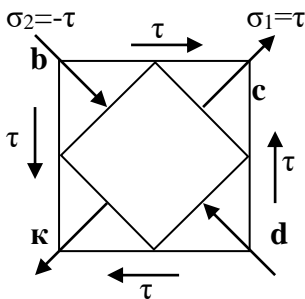
$$I_{\min} = 6164 \text{ см}^4$$

Угол  $I_{\max}$  образует наименьший угол с той осью относительно которой момент инерции больше. Определим момент сопротивления сечения относительно главных осей.

$$W_x = \frac{I_x}{Y_{\max/\min}}; \quad W_y = \frac{I_y}{X_{\max/\min}}$$

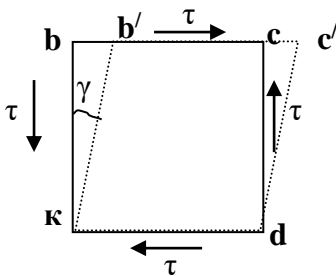
$X_{\max/\min}, Y_{\max/\min}$  - наиболее удаленные точки от главных осей (разрешается брать из масштаба)

## Сдвиг



При чистом сдвиге главные напряжения равны по значению и противоположны по знаку  $|\sigma_1| = |-\sigma_2|$  т.е. одно напряжение растягивающее, а другое сжимающее. При этом  $\sigma_1 = \tau$ , а  $\sigma_2 = -\tau$ . Элемент  $kbcd$  после деформации примет вид  $kb'c'd'$ . Угол  $\gamma$  называют углом сдвига и находят его по следующей эмпирической зависимости

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$



Где  $G$  – модуль сдвига (модуль упругости второго рода)

Линейная зависимость между  $\gamma$  и  $G$  справедлива лишь по достижении  $\tau$  предела пропорциональности

Между модулем упругости I и II рода существует определенная зависимость

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Например для стали

$$G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1 + 0.3)} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$$

Таблица модулей сдвига.

материал	G, МПа	материал	G, МПа
СЧ	$4,5 \cdot 10^4$	свинец	$0,7 \cdot 10^4$
Сталь углеродистая	$8 \cdot 10^4$	стекло	$2,2 \cdot 10^4$
медь	$4 \cdot 10^5 - 4,9 \cdot 10^4$	цинк	$2,2 \cdot 10^4$
Алюминий	$2,6 \cdot 10^4$	Сосна вдоль волокон	$0,55 \cdot 10^3$

## КРУЧЕНИЕ

Стержень испытывает кручение, если в его поперечных сечениях возникают крутящие моменты, т. е. моменты, лежащие в плоскости сечения.

### Построение эпюр внутренних силовых факторов при кручении

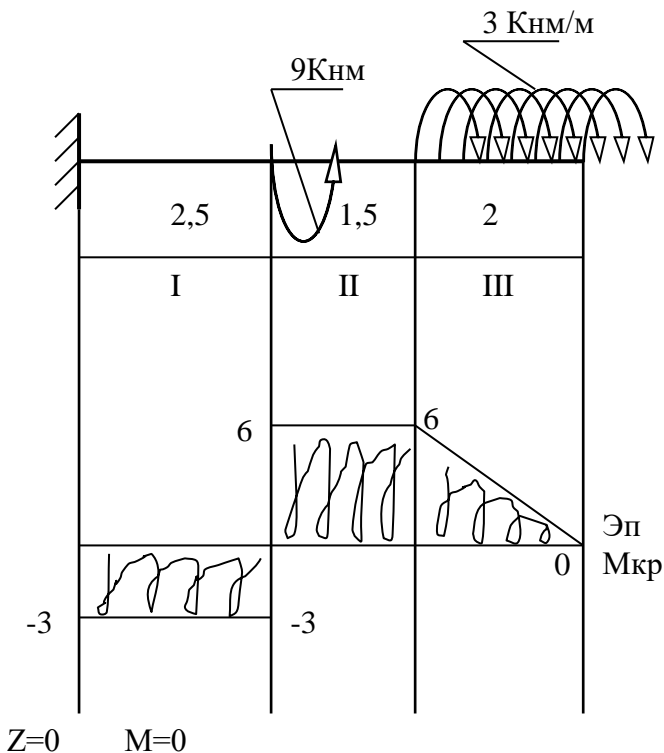
При кручении в поперечном сечении возникает крутящий момент, который определяется как алгебраическая сумма всех скручивающих пар расположенных с одной стороны от сечения.

Не следует забывать, что при срезе или сдвиге возникают касательные напряжения  $\tau$ .

Пример:

Дан консольный стержень с приложенным распределенным моментом  $M_{кр} = 3 \text{ КН/м}$  и сосредоточенным крутящим моментом  $M_{кр} = 9 \text{ КН/м}$ .

Найти опасное сечение стержня



Так как балка консольная, то реакции опор находить не обязательно, но рассматривать балку необходимо со свободного конца

$$\text{I } z \leftarrow 0-2,5$$

$$M_{кр} = 3 \cdot 2 - 9 = -3 \text{ КН/м} - \text{const}$$

$$\text{II } z \leftarrow 0-2,5$$

$$M_{кр} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ КН/м} - \text{const}$$

$$\text{III } z \leftarrow 0-2,5$$

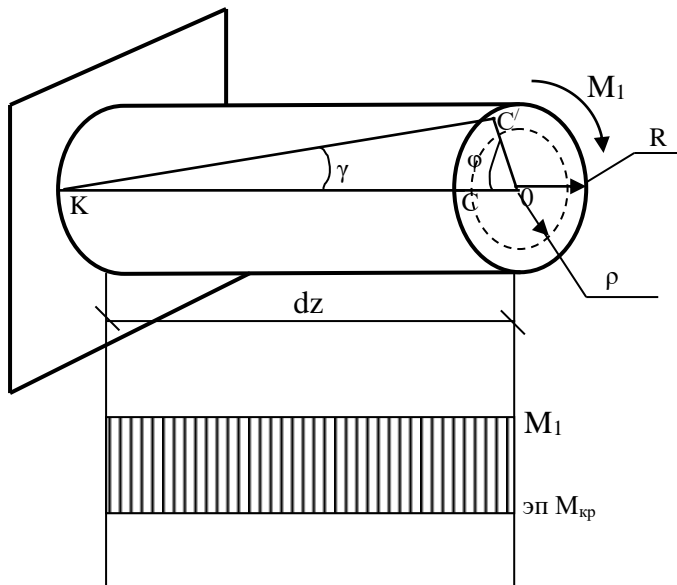
$$k_{р} = 3 \cdot Z$$

$$Z=2 \quad M=6$$



## Распределение касательных напряжений по поперечному сечению круглого вала при кручении

Дана консольная балка круглого сечения, к которой приложен внешний крутящий момент  $M_1$ . В результате воздействия данного усилия произошло скручивание вала, при этом отрезок  $CO$  развернется на угол  $d\phi$ . После перемещения данный отрезок обозначим как  $OC'$ . А отрезок  $KC$  лежащий на поверхности стержня переместится на угол  $\gamma$ .



При этом

$$\gamma = d\phi/dz$$

Где  $\phi$  – абсолютный угол закручивания;

$\gamma$  – угол сдвига.

Исходя из рис. Видно, что в сечении заделки  $\phi$  и  $\gamma$  равны нулю.

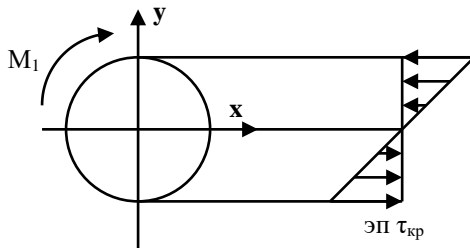
Поскольку любое сечение стержня испытывает деформацию сдвига, то касательные напряжения, возникающие в сечениях можно найти по формуле

$$\tau_{кр} = M_{кр} \cdot \rho / I_p$$

Где  $\rho$  – расстояние от центра вала до точки в которой определяется напряжение  
 $M_{кр}$  – внутренний сосредоточенный крутящий момент в сечении

Из формулы следует, что максимальные напряжения

возникают в крайних точках сечения и в центре они равны 0. Физически это видно по абсолютному углу закручивания  $\phi$  (рис). Частицы балки на рис наиболее смещены на периферийных слоях вала. Следовательно, там и возникают наибольшие напряжения,



сопротивляющиеся деформации системы.

Исходя из сказанного следует вывод, что разрушение стержня при кручении начнется в крайнем слое вала, там, где максимальны касательные напряжения  $\tau_{кр}^{макс}$ . Формула для этих напряжений

$$\tau_{кр}^{макс} = M_{кр} \cdot R / I_p = M_{кр} / W_p$$

Откуда наибольшие касательные напряжения при кручении не должны превышать максимально допустимых напряжений  $[\tau_{кр}]$  (условие прочности при кручении)

$$\tau_{кр}^{макс} = M_{кр} \cdot R / I_p = M_{кр} / W_p \leq [\tau_{кр}]$$

**Данное условие прочности используется**

**Для проверки прочности стержня**, т. е. по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения стержня определяются фактические напряжения ( $\tau$  и сравнивать их с допускаемыми.)

$$\tau_{кр}^{макс} = M_{кр} \cdot R / I_p = M_{кр} / W_p \leq [\tau_{кр}]$$

**Определения** (по известным нагрузке и допускаемому напряжению) **размеров поперечного сечения стержня**, требуемые по условию его прочности:

$$M_{кр} / [\tau_{кр}] \leq W_p$$

$$\text{При } W_p = \pi \cdot d^3 / 16$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр}}{\pi [\tau_{кр}]}}$$

- для вала круглого сечения

**Определения допускаемого крутящего момента** по заданным размерам поперечного сечения стержня и известному допускаемому напряжению:

$$M_{кр} \leq [\tau_{кр}] \cdot W_p$$

## Деформации и перемещения при кручении валов

Если крутящий момент и величина жесткости  $GI_p$  постоянна на всем протяжении участка то абсолютный угол закручивания найдем по формуле

$$\varphi = M_{кр} L / GI_p$$



$L$  – длина участка от заземления до поперечного сечения, м

$G$  – модуль сдвига характеризует сопротивление материала сдвигу, МПа

При  $\gamma = \varphi/L$  получим

$$\gamma = M_{кр} / GI_p$$

### Пример

Дана балка с поперечным сечением круглой формы диаметром 10 см длиной 6 м. Модуль сдвига балки  $G = 4 \cdot 10^4$  МПа. К данной балке приложены следующие крутящие моменты

$M_1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $M_2 = 300 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Определить

1 опасное сечение стержня

2 построить эпюры касательных напряжений в опасном сечении

3 Определить максимальное напряжение возникающее в стержне и напряжение в опасном сечении на расстоянии 2 см от его центра тяжести

4 Определить выдержит ли данная балка заданную нагрузку, если допустимое касательное напряжение материала  $[\tau_{кр}] = 80$  МПа. В случае если система не выдержит предложенные нагрузки рассчитать требуемые размеры балки.

5 На расстоянии 5 м от заземления рассчитать абсолютный угол закручивания  $\varphi$ .

1 Построим эпюры внутреннего сосредоточенного крутящего момента  $M_{кр}$

Из построенных эпюр следует, что в системе нет ярко выраженного опасного сечения

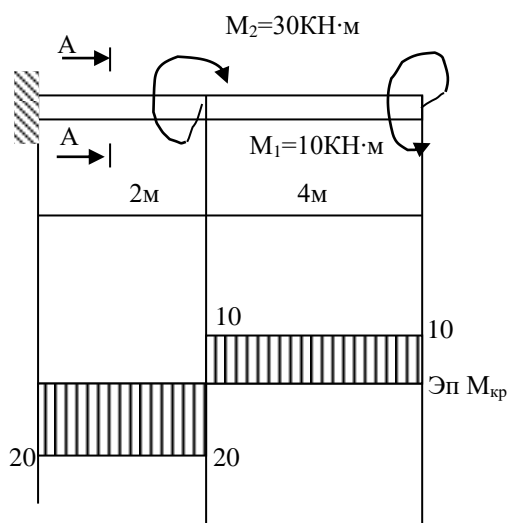
опасным является любое сечение на протяжении I участка

Рассмотрим сечение А-А взяв его за опасное.

Максимальное напряжение  $\tau_{\text{макс}}$  находится в опасном сечении (так как опасное сечение это место с наибольшей вероятностью произойдет разрушение стержня, а разрушение начинается в максимально напряженных волокнах следовательно находится в опасном сечении на поверхности стержня )

Построим эпюры касательных напряжений

где



опасного сечения стержня.

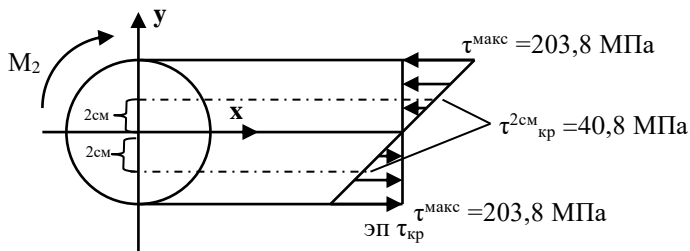
Касательные напряжения опасного сечения на расстоянии 2 см от центра тяжести найдем по формуле

$$\tau_{кр} = M_{кр} \cdot \rho / I_p$$

$$I_p = \pi \cdot d^4 / 32$$

$$\tau_{кр}^{2см} = M_{кр} \cdot \rho / I_p = \frac{2000 \text{ КН} \cdot \text{см} \cdot 2 \text{ см}}{\pi 10^4 / 32 \text{ см}^4} = 4,08 \text{ КН} / \text{см}^2 = 40,8 \text{ МПа}$$

$$\tau_{кр}^{10см} = M_{кр} \cdot \rho / I_p = \frac{2000 \text{ КН} \cdot \text{см} \cdot 5 \text{ см}}{\pi 10^4 / 32 \text{ см}^4} = 10,19 \text{ КН} / \text{см}^2 = 101,9 \text{ МПа} > 80 \text{ МПа} [\tau]$$



Максимальное напряжение возникающее в стержне равно  $101,9 \text{ МПа} > 80 \text{ МПа} [\tau_{кр}]$

Вывод данное сечение не выдержит заданных нагрузок.

Определим требуемые размеры сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр}}{\pi [\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2000}{\pi \cdot 8}} \approx 1 \text{ см}$$

Рассчитаем касательные напряжения при  $d=11 \text{ см}$

$$\tau_{кр}^{11см} = M_{кр} \cdot \rho / I_p = \frac{2000 \text{ КН} \cdot \text{см} \cdot 5,5 \text{ см}}{\pi 11^4 / 32 \text{ см}^4} = 7,7 \text{ КН} / \text{см}^2 = 77 \text{ МПа} < 80 \text{ МПа} [\tau]$$

Балка диаметром 11 см выдерживает заданные нагрузки

Рассчитаем абсолютный угол закручивания  $\varphi$

Так как эпюры  $M_{кр}$  лежат в разных плоскостях, то угол закручивания будет рассчитываться по формуле

$$\varphi^{общ} = \varphi^I + \varphi^{II}$$

$$\varphi^I = M_{кр}^I L^I / G I_p = \frac{2000 \cdot 200}{4 \cdot 10^3 \cdot \pi 11^4 / 32} = 0,07 \text{ рад}$$

$$G = 4 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 4 \cdot 10^3 \text{ КН} / \text{см}^2$$

$$\varphi^{II} = M_{кр}^{II} L^{II} / G I_p = \frac{1000 \cdot 300}{4 \cdot 10^3 \cdot \pi 11^4 / 32} = 0,02 \text{ рад}$$

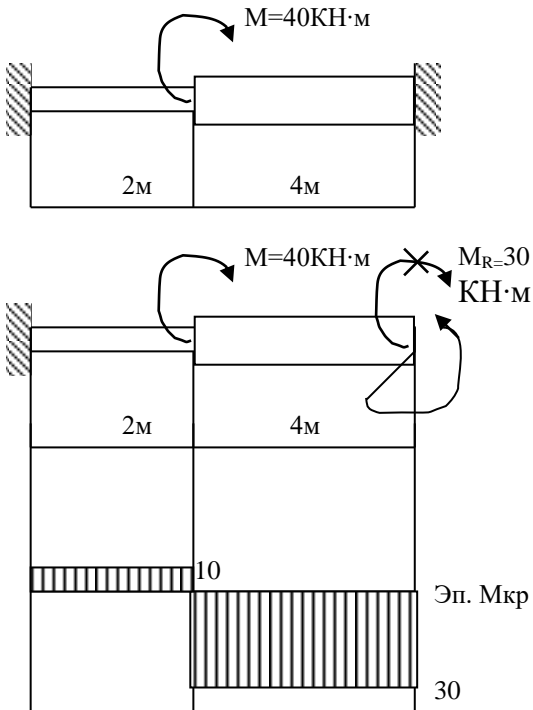
$$\varphi^{общ} = 0,07 + 0,02 = 0,09 \text{ рад}$$

## Статически неопределимые задачи при кручении

При кручении, так же как и при растяжении, встречаются задачи которые не могут быть решены при помощи одних лишь уравнений статики. Порядок решения таких задач аналогичен порядку решения при растяжении сжатии.

Дополнительное уравнение здесь получают из условия деформации.

Пример.



Дана ступенчатая балка с приложенным крутящим моментом  $M = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Диаметр большей ступень 6 см, меньшей 4 см.  $G = 3,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}$  Требуется построить эпюры распределения внутреннего крутящего момента.

Решение

Балка статически неопределима так как имеется 2 опорные реакции. Как и в случае со статически неопределимыми задачами на растяжение сжатие, отбросим одну из опор и заменим ее силой равной отброшенной связи  $M_R$ .

Вместо недостающего уравнения статики применим уравнение деформации т.е. рассчитаем деформацию

зашемленного правого конца по формуле

$$\varphi = M_{\text{кр}} L / GI_p$$

Разобьем систему на 2 участка

И полное перемещение будет равно перемещению от двух участков в отдельности

$$\varphi^{\text{общ}} = \varphi^{\text{I}} + \varphi^{\text{II}} = 4000 \cdot 200 / 3500 \cdot 25,12 + (4000 + M_R) \cdot 600 / 3500 \cdot 127 = 9,1 + (4000 + M_R) \cdot 0,0013 = 0$$

так как в сечении зашемления перемещения равны 0

$$G = 3,5 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$$

$$I_p^{\text{I}} = \pi \cdot d^4 / 32 = 3,14 \cdot 4^4 / 32 = 25,12 \text{ см}^4$$

$$I_p^{\text{II}} = \pi \cdot d^4 / 32 = 3,14 \cdot 6^4 / 32 = 127,17 \text{ см}^4$$

Решим полученное уравнение

$$9,1 + (4000 + M_{R.}) * 0,0013 = 0$$

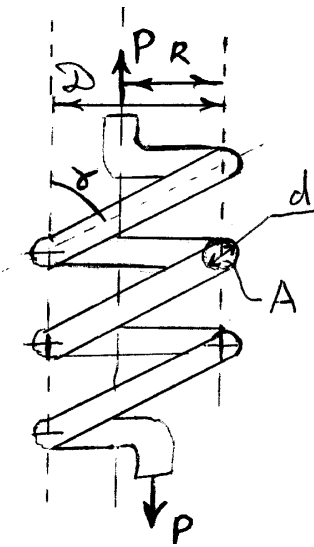
$$M_{R.} = -3000 \text{ КН} * \text{см} = 30 \text{ КН} * \text{м}$$

## Расчет цилиндрических винтовых пружин

Пружины наиболее распространенные упругие элементы современных машин. В большинстве случаев их используют в качестве амортизаторов иногда в виде аккумуляторов энергии.

Наибольшее распространение получили цилиндрические винтовые пружины из прутков круглого поперечного сечения

Пусть дана пружина диаметром  $D$ , с диаметром прутка  $d$ , нагруженная усилием  $P$ . Рассмотрим внутренние силы возникающие в поперечном сечении площадью  $A$  прутка пружины. Исходя из рассмотренной схемы, на основании уравнений статики, в сечении действует поперечная сила  $Q=P$  и внутренний крутящий момент  $M_{кр}=PR$ .



Предположив что угол наклона витков к оси равен  $90^0$  (допущение справедливо для пружин с углом  $75^0 < \alpha < 90^0$ , большинство пружин имеет угол наклона  $\alpha = 80-85^0$ ) найдем

напряжения возникающие в сечении прутка пружины

От поперечной силы  $Q$

$$\tau_Q = \frac{Q}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

От крутящего момента  $M_{кр}$

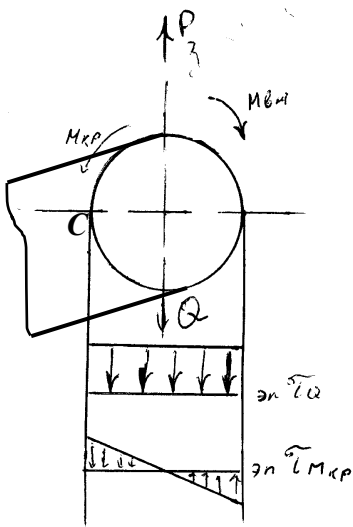
$$\tau_{M_{кр}} = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \rho$$

Где  $\rho$  – расстояние от центра прутка до рассматриваемого волокна

Из условий равновесия  $P \uparrow$  следовательно  $Q \downarrow$  и  $\tau \downarrow$ ,  $M^{\text{внешн}} \curvearrowright$  следовательно  $M_{кр} \curvearrowleft$

Из построенных эпюр мы видим, что наибольшие напряжения возникают в точке  $C$ , т.е. на внутренней стороне пружины, а следовательно там наибольшая вероятность возникновения трещины.

Рассчитаем суммарные напряжения в т.С



$$\tau_{\text{Mкр}}^{\text{max}} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{M_{\text{кр}} \left( \frac{d}{2} \right)}{J_p} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{P \left( \frac{D}{2} \right)}{W_p} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right)$$

$\frac{d}{2D}$  значительно меньше единицы.  $\frac{d}{2D} = (0,05 - 0,1)$ , поэтому ают.

$$\tau_{\text{max}} = \frac{8PD}{\pi d^3}$$

т, что увеличение диаметра пружины уменьшает ее прочность, а /величивает ее.

Данная формула имеет приближенный характер более точная формула выглядит следующим образом

$$\tau_{\text{max}} = K_n \frac{8PD}{\pi d^3}$$

Где  $K_n = \frac{D/d + 0.25}{D/d - 1}$

Откуда условие прочности выглядит следующим образом

$$\tau_{\text{max}} = \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

либо

$$\tau_{\text{max}} = K_n \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

Для Ст5-Ст45  $[\tau]=25-35\text{МПа}$ , пружинные стали  $[\tau]=400-500\text{МПа}$

## Деформация пружин

Перемещение конца пружины  $\Delta$  можно найти по следующей формуле

$$\Delta = \frac{8PD^3n}{Gd^4}$$

Где  $n$  – число витков пружины

Величина нагрузки  $P$  при которой происходит перемещение на 1 ед. называют жесткостью  $C$

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3} \Rightarrow \Delta = \frac{P}{C}$$

Из формул перемещения и жесткости следует, что увеличение числа витков пружины уменьшает ее жесткость, а увеличение диаметра прутка увеличивает ее.

### Пример

Рассчитать максимальную нагрузку на пятивитковую пружину Ст5  $[\tau]=25\text{МПа}$ ;  $G=8 \cdot 10^4\text{МПа}$ , диаметром 10см, с диаметром прутка 1см. Найти перемещение конца пружины при приложении усилия 0,05кН

И условия прочности для пружин

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau] \quad \text{следовательно} \quad \frac{[\tau]\pi d^3}{8D} \geq P$$

откуда

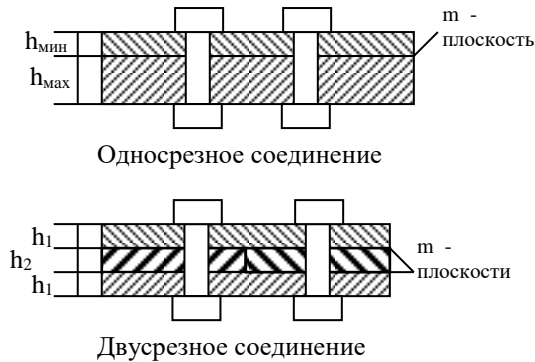
$$P \leq \frac{25 \cdot 3,14 \cdot 1^3}{8 \cdot 10} = 0,098\text{кН}$$

Рассчитаем перемещение

$$\Delta = \frac{8PD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 0,05 \cdot 10^3 \cdot 5}{8 \cdot 10^3 \cdot 1^4} = 0,25\text{см}$$

## Практические расчеты на сдвиг

### Заклепочные соединения



Заклепочное соединение – это скрепление двух и более элементов конструкции при помощи цилиндрических втулок (заклепок) путем пластического деформирования их выступающих частей

Заклепочное соединение бывает односрезным и многосрезным

Опыты показывают, что при нагружении, в заклепках, внутренние усилия распределены

неравномерно, и чем больше заклепок тем больше неравномерность. При этом в крайних заклепках напряжения значительно выше чем в средних. Однако при статической нагрузке разрушение в заклепках происходит одномоментно, что позволяет принять допущение, что при статической нагрузке внутренняя поперечная сила  $Q$  действующая в каждой заклепке одинакова.

$$Q = \frac{P}{n}$$

Где  $P$  – сила действующая на соединение.

$n$  – число заклепок

принимается, что касательные напряжения в заклепках распределены равномерно, а следовательно

$$\tau = \frac{P}{nA}, \text{ или } \tau = \frac{Q}{A},$$

где  $A$  – площадь заклепки

Для многосрезных соединений касательные напряжения находятся как

$$\tau = \frac{P}{nmA},$$

Где  $m$  – число плоскостей среза.

Кроме среза заклепок при действии растягивающих усилий может произойти смятие листов. Напряжения смятия считаются по следующей формуле

$$\sigma_{см} = \frac{P}{nhd}$$

Где  $d$  – диаметр заклепки

$h$  - толщина сминаемого листа

При этом если соединены 2 элемента (односрезное соединение) за  $h$  принимают  $h_{min}$ .

Если состыкуются 3 листа то за  $h$  принимают  $h_2$ , однако если  $h_2 > 2h_1$  то за  $h$  принимают  $2h_1$

Откуда условие прочности заклепочного соединения состоит из двух неравенств

$$\begin{cases} \tau = \frac{P}{nmA} \leq [\tau] \\ \sigma_{см} = \frac{P}{nhd} \leq [\sigma_{см}] \end{cases}$$

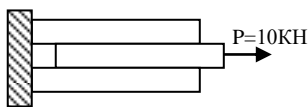
При этом допускаемые напряжения на смятие можно рассчитать как

$$[\sigma_{см}] = 2[\sigma]$$

Пример

Рассчитать количество Аллюминиевых заклепок диаметром 3мм,  $[\tau] = 50 \text{ МПа}$ , Требуемое для соединения 3 листов стали толщиной 5мм, при приложении усилия 10кН

Из условия прочности заклепочного соединения



$$\begin{cases} \tau = \frac{P}{nmA} \leq [\tau] \\ \sigma_{см} = \frac{P}{nhd} \leq [\sigma_{см}] \end{cases}$$

$$\tau = \frac{P}{nmA} \leq [\tau] \text{ следовательно, } n \geq \frac{P}{[\tau]mA} = \frac{10}{5 \cdot \frac{0,3^2}{4}} = 14,15 \approx 15шт$$

Рассчитаем конструкцию на смятие

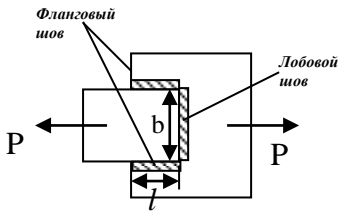
$h = 0,5 \text{ см}$ ,  $[\sigma_{см}] = 2[\sigma] = 2 * 160 = 320 \text{ МПа}$

$$\sigma_{см} = \frac{P}{nhd} \leq [\sigma_{см}] \text{ следовательно } \sigma_{см} = \frac{10}{15 * 0,5 * 0,3} \leq 320 \text{ смятие не происходит}$$



## Сварные соединения

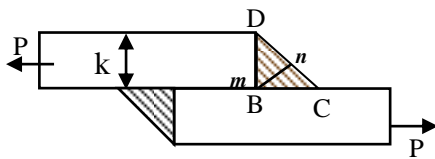
Сварное соединение- это соединение элементов конструкции путем сплавления материалов их составляющих



Рассмотрим два сваренных элемента

При расчете сварных соединений принимают что разрушение шва DBC происходит по биссектрисе mn. В свою очередь биссектриса  $mn=0.7BD=0.7k$

Где  $k$  – толщина свариваемого листа



таким образом площадь опасного сечения:

$$\text{лобового шва } A_{\text{лоб}}^{\text{оп}} = 0,7kb$$

$$\text{флангового } A_{\text{фланг}}^{\text{оп}} = 0,7k2l$$

при этом допускаемая нагрузка при использовании только лобового шва составляет

$$[P]=A_{\text{лоб}}^{\text{оп}}[\tau_{\text{шв}}]=0,7kb[\tau_{\text{шв}}]$$

При использовании только флангового шва

$$[P]=A_{\text{фланг}}^{\text{оп}}[\tau_{\text{шв}}]=0,7k2l[\tau_{\text{шв}}]$$

Где  $[\tau_{\text{шв}}]$  – допускаемое касательное напряжение шва сварки принимается как 50-70% от допускаемого касательного напряжения свариваемого металла

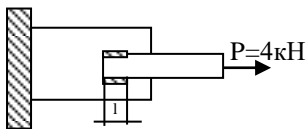
$$[\tau_{\text{шв}}]=(0,5-0,7)[\tau]$$

Таким образом условие прочности сварных соединений выглядит следующим образом

$$0,7kb[\tau_{\text{шв}}]+ 0,7k2l[\tau_{\text{шв}}]<[P]$$

$$0,7k[\tau_{\text{шв}}](b+2l)<[P]$$

Пример



Рассчитать минимальную длину шва при соединении 2стальных листов толщиной 3мм и  $[\tau]=100\text{МПа}$  нагрузка на разрыв 4кн

Из условия прочности сварного соединения

$$0,7k[\tau_{\text{шв}}](b+2l)<[P]$$

Фронтального шва нет следовательно  $b=0$ ;  $[\tau_{\text{шв}}]=0,5[\tau]=0,5*100=50\text{МПа}$

$$l=4/(2*0,7*0,35)=2\text{см}$$

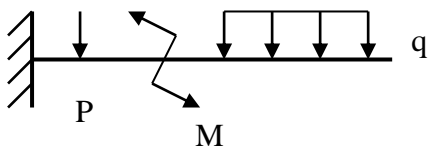
## Лекция 15

## Изгиб

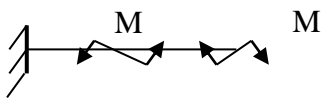
**Изгиб** – деформация при которой происходит искривление осей как прямых, так и кривых брусьев.

При этом в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты, т. е. внутренние моменты, плоскость действия которых перпендикулярна плоскости поперечного сечения стержня.

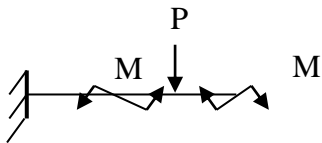
Внешние силовые факторы вызывающие изгиб стержня представим на рис



Изгиб называют чистым, если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении стержня.



Чаще, однако, в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Такой изгиб называют поперечным.



Если плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения стержня, изгиб носит название простого или - плоского (применяется также название прямой изгиб).

### Нахождение внутренних силовых факторов при различных видах изгибающих нагрузок

При изгибе возникает внутренняя поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$

По правилу РОЗУ. внутренняя поперечная сила  $Q$ , численно равна сумме всех равнодействующих поперечных внешних сил действующих по одну сторону от разреза

Изгибающий момент численно равен сумме моментов внешних сил относительно сечения действующих по одну сторону от разреза

Равнодействующая любой распределенной нагрузки при изгибе приложена в центре тяжести распределения и численно равна площади распределения на участке.

Моментом силы относительно какой либо т.А называется произведение равнодействующей силы, на расстояние от точки, до места приложения этой силы.

Расстояние от точки, до места приложения силы называется плечом силы и обозначается **L**

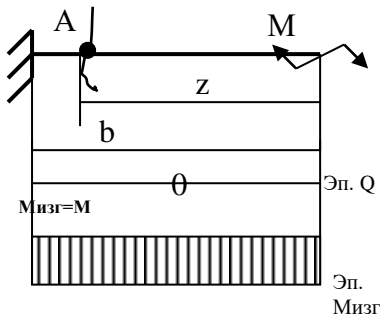
$$M = R * L$$

Где  $M$  – момент от равнодействующей силы  $R$ .

$R$  - равнодействующая сила;

$L$  - Расстояние от точки, до места приложения равнодействующей силы.

а) Определим зависимость распределения по участку  $b$ , внутреннего момента  $M$  от действия изгибающего момента  $M$ .

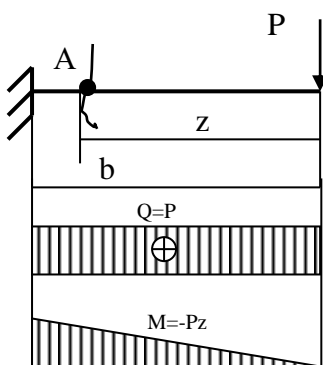


В данном случае поперечных сил нет  $Q=0$  так как нет поперечных внешних сил действующих по одну сторону от разреза.

Изгибающий момент численно равен сумме моментов внешних сил относительно сечения действующих по одну сторону от разреза

Внутренний изгибающий момент равен внешнему изгибающему моменту и постоянен на всем протяжении участка  $b$ . Т.е.  $M_{изг} = M$

б) Определим зависимость распределения по участку  $b$ , внутреннего момента  $M$  от действия сосредоточенной силы  $P$



Произведем разрез на участке ( предположим в т А), и отбросив левую часть найдем поперечную силу  $Q$  как сумму всех равнодействующих действующих по одну сторону от разреза.

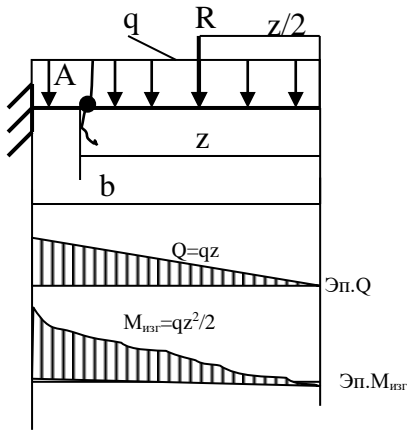
$$Q = P$$

Внутренний изгибающий момент равен сумме внешних моментов относительно разреза и в данном случае

$$M = R * z = -P * z$$

Знак минус по правилу дождя.

в) Определим зависимость распределения по участку  $b$ , внутреннего момента  $M$  от действия равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$ .



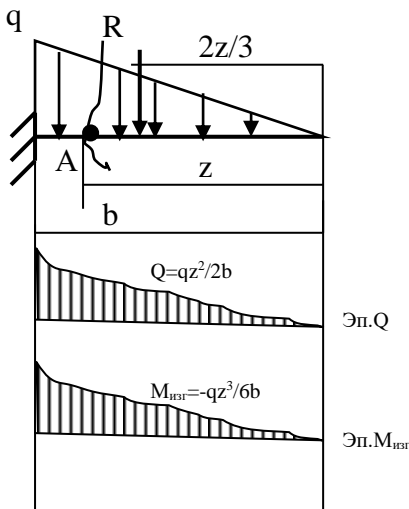
Произведем разрез на участке (предположим в т А), и отбросив левую часть найдем поперечную силу Q как сумму всех равнодействующих действующих по одну сторону от разреза. При этом равнодействующая любой распределенной нагрузки есть площадь ее распределения на чертеже т.е.  $Q=qz$ . И лежит она в центре тяжести распределения (в данном случае центр тяжести в середине прямоугольника).

Внутренний изгибающий момент равен сумме внешних моментов относительно разреза и в данном случае момент создает равнодействующая распределенной нагрузки, следовательно

$$M = -R \cdot z/2 = -q \cdot z \cdot z/2 = -qz^2/2$$

г) Определим зависимость распределения по участку b, внутреннего момента M от действия неравномерно распределенной нагрузки интенсивностью q.

Неравномерно распределенную нагрузку легче всего рассматривать с острого конца.



Произведем разрез на участке отбросив левую часть найдем равнодействующую R как площадь ее распределения по схеме. Следовательно

$$R = S_{aeo} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AO$$

$$AO = z$$

AE – неизвестна. Найдем AE из подобия треугольников

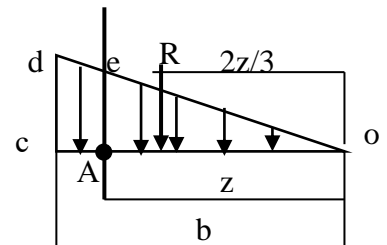
$$\Delta cdo \sim \Delta aeo \Rightarrow \frac{cd}{ae} = \frac{co}{ao} \Rightarrow ae = \frac{cd \cdot ao}{co}$$

$$Cd=q, co=b, ao=z \Rightarrow ae = \frac{q \cdot z}{b}$$

Подставим найденное значение ae в формулу

$$R = S_{aeo} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot z}{b} \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot z}{b} \cdot z = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot z^2}{b}$$

$$R = Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot z^2}{b}$$



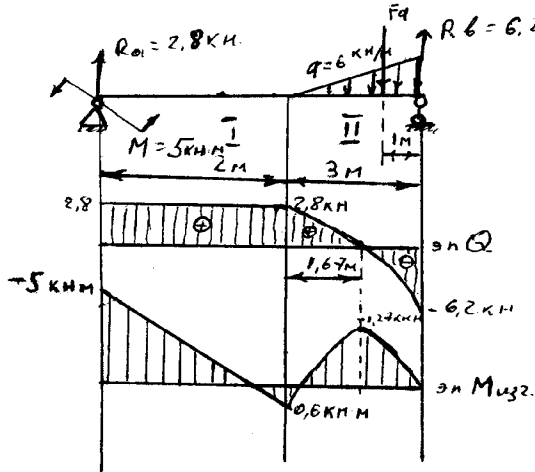
Найдем момент равнодействующая в треугольной нагрузке всегда лежит на расстоянии  $2Z/3$  от острого конца.

$$M = R \cdot z/3 =$$

$$M = R \cdot \frac{1}{3} z = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot z^2}{b} \cdot \frac{1}{3} z = \frac{q \cdot z^3}{6b}$$

$$M = \frac{q \cdot z^3}{6b}$$

Построить эпюры ВСФ в следующей балке.



Найдём реакции опор

$$\sum M_A(F) = 0$$

$$M + 5R_B - \frac{1}{2} q \cdot 3 \cdot 4 = 0$$

$$R_B = 6,2 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B(F) = 0$$

$$M - R_{a1} \cdot 5 + \frac{1}{2} q \cdot 3 \cdot 1 = 0$$

$$R_{a1} = 2,8 \text{ кН}$$

Проверка

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{a1} + R_B - \frac{1}{2} q \cdot 3 = 0$$

$$9 - 9 = 0 !!!$$

Построение эпюр

$$\text{I } z \rightarrow 0 \div 5$$

$$Q = R_{a1} = 2,8 \text{ кН - const.}$$

$$M_{изг} = R_{a1} z - M$$

$$z = 0 \quad M_{изг} = -5$$

$$z = 5 \quad M_{изг} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\text{II } z \rightarrow 0 \div 3 \text{ м}$$

$$Q = R_{a1} - \frac{1}{2} \frac{q z^2}{3} = 2,8 - z^2$$

$$z = 0 \quad Q = 2,8 \text{ кН}$$

$$z = 3 \quad Q = -6,2 \text{ кН.}$$

Найдём точку пересечения

$$2,8 - z^2 = 0$$

$$z^2 = 2,8$$

$$z = \sqrt{2,8}$$

$$z = \pm 1,67 \text{ м}$$

$$M_{изг} = R_{a1} (2+z) - M - \frac{q z^3}{6 \cdot 3}$$

$$z = 0 \quad M = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$z = 1,67 \quad M = -1,77 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$z = 3 \quad M = 0 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

## Лекция 16

## Дифференциальные зависимости при изгибе (теорема Журавского).

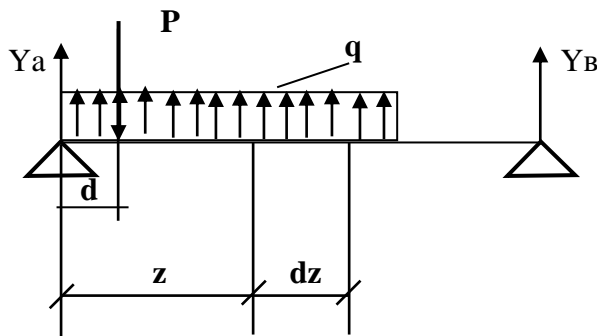
Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют определенные зависимости.

Рассмотрим стержень на 2 опорах. К которому с левого конца подведена равномерно распределенная нагрузка  $q$  и сосредоточенная сила  $P$ , на опорах возникают реакции  $Y_a$  и  $Y_b$ .

Найти:

- 1) Рассчитать поперечную силу  $Q$  и изгибающий момент  $M$ , в сечении на расстоянии  $Z$  от левого конца балки.
- 2) Определить, как изменится  $Q$  и  $M$  в сечении расположенном на расстоянии  $dZ$  от первого сечения.

Решение:



$$Q = Y_a - P + q \cdot z \quad (a)$$

Аналогично найдем силу  $Q$  на расстоянии  $dz$  от первого сечения. При этом учтем, что сила  $Q$  изменится на величину  $dQ$ .

$$Q + dQ = Y_a - P + q \cdot (z + dz) \quad (b)$$

Очевидно, что если нам нужно найти величину  $dQ$ , то следует из выражения (b) вычесть выражение (a).  $(Q + dQ) - Q$

Следовательно,

$$Z \rightarrow 0 - Z + dZ$$

$$dQ = (Y_a - P + q \cdot (z + dz)) - (Y_a - P + q \cdot z) = Y_a - P + qz + qdz - Y_a + P - qz$$

$$dQ = qdz$$

$$q = dQ/dz$$

- I дифференциальная зависимость.

Аналогично рассчитаем момент  $M$  относительно сечения на расстоянии  $Z$ .

$$Z \rightarrow 0 - Z$$

$$M = Y_a Z - P(Z - d) + qZ^2/2 \quad (b)$$

На расстоянии  $Z+dZ$  момент изменится на какую то величину  $M+dM$

Найдем изменившийся момент

$$Z \rightarrow 0 - Z+dZ$$

$$M+dM = Ya(Z+dZ) - P(Z-d+dZ) + q(Z+dZ)^2/2 \quad (г)$$

Рассчитаем на какую величину изменился момент (найдем  $dM$  вычтя из выражения  $г$  выражение  $в$ ).

$$dM = (Ya(Z+dZ) - P(Z-d+dZ) + q(Z+dZ)^2/2) - (YaZ - P(Z-d) + qZ^2/2) = (Ya(Z+dZ) - P(Z-d+dZ) + q(Z^2+2zdZ+d^2Z)/2) - (YaZ - P(Z-d) + qZ^2/2) = YaZ+YadZ - PZ+Pd-PdZ + qZ^2/2+2qzdZ/2-YaZ+PZ-$$

$$Pd+qZ^2/2 = dZ(Ya - P + q*Z) = QdZ \quad (д)$$

Выражение (а)

Это выражение приравниваем к 0, т.к  $d^2Z$  очень малое число (второго порядка малости).

Из выражения Д

$$Q = dM/dZ \quad - \text{II дифференциальная зависимость}$$

Откуда подставив I дифференциальную зависимость во II получим

$$Q = dQ/dz = d^2M/dZ^2 \quad - \text{Теорема Журавского}$$

### Следствия из теоремы Журавского

Следствия из теоремы Журавского позволяют облегчить построение эпюр и проверять их правильность

#### 1 О моментах

Из формулы

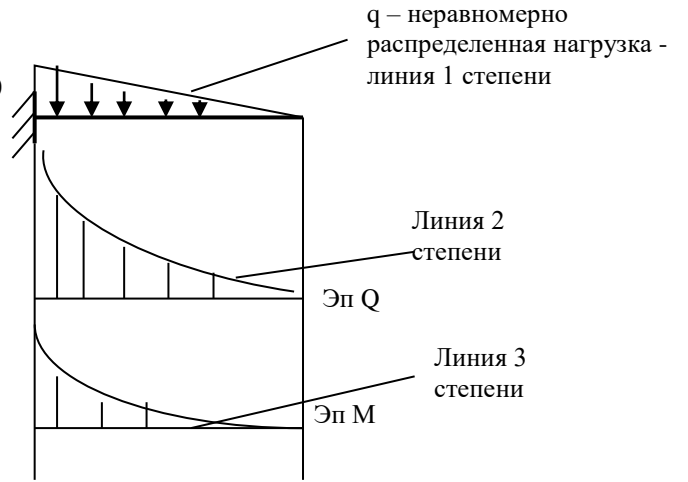
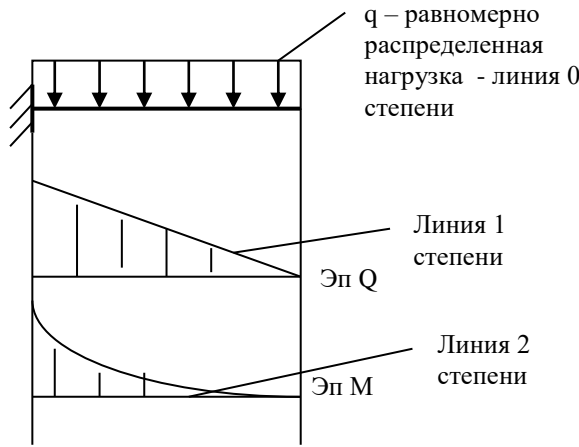
$$Q = dM/dZ$$

- В сечении где  $Q = 0$   $M$  имеет экстремум.
- На участке где  $Q = 0$  -  $M$  величина постоянная.

#### 2. О степенях эпюр

Если интенсивность распределенной нагрузки  $q$  – линия  $n$  степени, то эпюра  $Q$  линия степени  $n+1$ , а эпюра  $M$  линия  $n+2$  степени.

Пример:



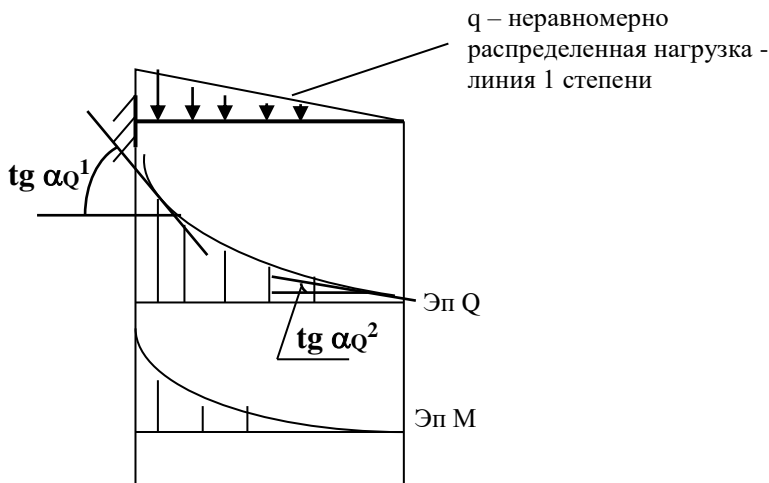
$Y = a$  - линия 0 степени

$Y = aZ^2$  - - линия 2 степени

$Y = aZ$  - линия 1 степени

$Y = aZ^3$  - - линия 3 степени

Если в уравнении хотя бы одна из переменных  $z$  имеет какую либо степень  $n$ , то вся линия считается  $n$ -й степени.



**3 О выпуклости эпюр**

а) Первый способ.

$q = dQ/dz = tg \alpha_Q$  - (  $dQ$  - противолежащий катет,  $dz$  - прилежащий).

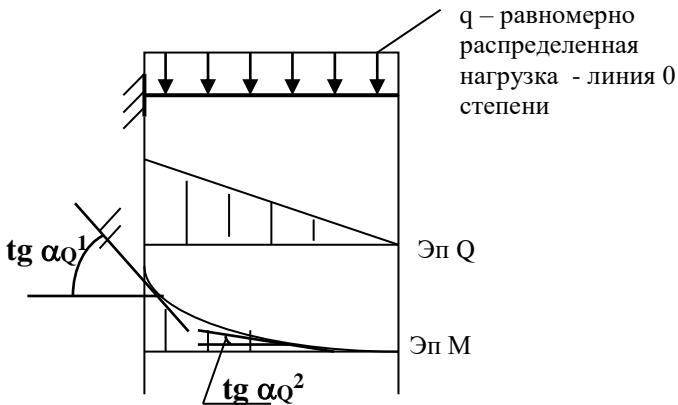
Если слева на право  $q$  убывает, то и тангенс  $tg \alpha_Q$  убывает.

Если слева на право убывает

$Q$ , то убывает и тангенс  $tg \alpha_M$ .

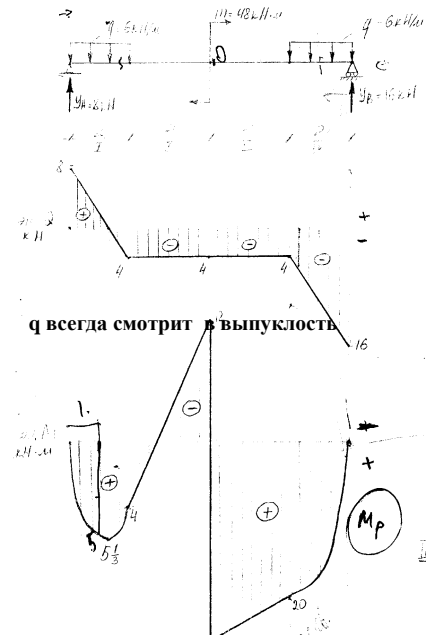
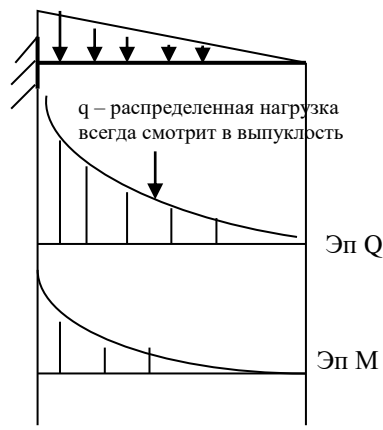
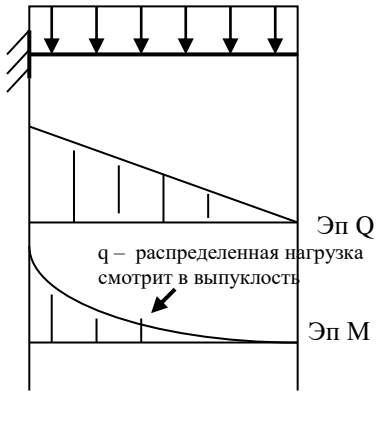
Из рисунков видно, что при уменьшении распределенной нагрузки, убывает и тангенс  $tg \alpha_Q^1$  больше  $tg \alpha_Q^2$

Аналогично и с эпюрой  $Q$ .

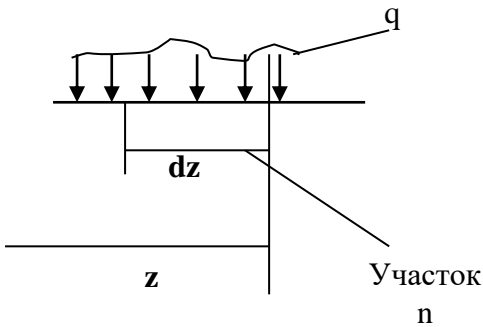


б) Второй способ.





4. Правило акробата для построения эюр Q и правило площадей для построения эюр M.



Рассмотрим бесконечно малый участок  $dZ$  с неравномерно распределенной нагрузкой  $q$  на нем. На этом участке внутренняя сила  $Q$  изменяется от  $Q_{нач}^n$  до  $Q_{кон}^n$  нужно узнать на сколько изменилась  $Q$  на данном участке

$$Q_{кон}^n - Q_{нач}^n = \int_{z_2}^{z_1} dQ = \int_{z_2}^{z_1} q dz = \omega_q^n$$

где  $\omega_{кон}^n$  – площадь на участке  $n$  распределенной нагрузки  $q$

Следовательно если на участке нет  $q$  и  $P$  то

$$Q_{кон} = Q_{нач}$$

$$Q_{кон} = Q_{нач} + P$$

- Если в точке  $Q_{нач}$  есть сосредоточенная нагрузка  $P$

$$Q_{кон} = Q_{нач} + \omega_q^n$$

- Если на участке распределенная нагрузка  $q$

Аналогично выводятся правила для моментов

$$M_{кон} = M_{нач}$$

- Если в точке  $M_{нач}$  нет сосредоточенного момента  $M_0$

$$M_{кон} = M_{нач} + M_0$$

Если в точке  $M_{нач}$  есть сосредоточенный момент  $M_0$

$$M_{кон} = M_{нач} + \omega_Q^n$$

- Если на участке есть поперечная сила  $Q$  или распр нагр  $q$

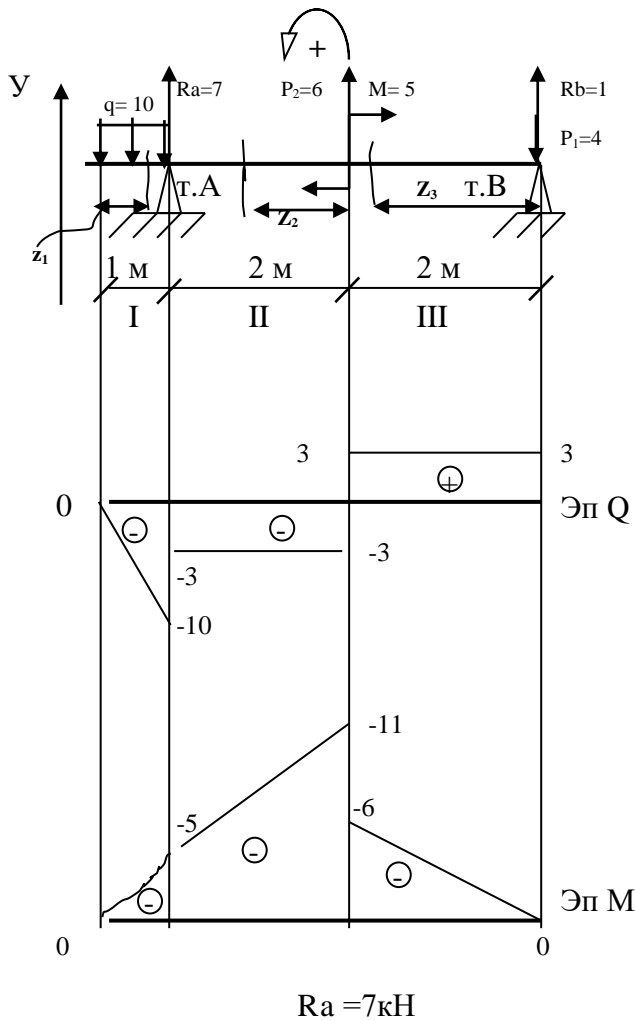
$\omega_Q^n$  - Площадь эюры поперечной силы на участке  $n$

## Лекция 17

**Построение эпюр внутренних силовых факторов при изгибе аналитическим методом.**

Дан стержень на двух опорах. Длина стержня 5 метров. По длине стержня приложены следующие нагрузки: поперечные силы  $P_1=4$  кН  $P_2=6$  кН, распределенная нагрузка  $q=10$  кН/м. Изгибающий момент  $M=5$  кН·м. Определить внутренние усилия действующие в поперечном сечении стержня. Построить эпюры.

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ . Поставленная задача сводится к отысканию зависимости распределения  $M$  и  $Q$  в поперечных сечениях балки по длине стержня.



Произведем проверку найденных реакций.

Проверка

$$\sum F_y = 0; \quad -q \cdot 1 + R_a + P_2 + R_b - P_1 = 0$$

Для решения поставленной задачи необходимо произвести расчет реакций опор. И затем применив метод сечений построить эпюры.

**1 Расчет реакций опор.**

Так как балка находится в равновесии то сумма моментов всех сил относительно любой точки стержня равно 0. записав уравнения равновесия моментов относительно точек опор (т. А , т. В). Найдем искомые реакции.

$$\sum M_A(F) = 0$$

$$q \cdot 1 \cdot 0,5 + P_2 \cdot 2 - M - P_1 \cdot 4 + R_b \cdot 4 = 0$$

$$10 \cdot 1 \cdot 0,5 + 6 \cdot 2 - 5 - 4 \cdot 4 + 4R_b = 0$$

$$R_b = 1 \text{ кН}$$

$$\sum M_B(F) = 0$$

$$q \cdot 1 \cdot 4,5 - 4R_a - P_2 \cdot 2 - M = 0$$

$$10 \cdot 1 \cdot 4,5 - 4R_a - 6 \cdot 2 - 5 = 0$$

$$-10+7+6+1-4=0$$

$$\underline{-14+14=0 !!!}$$

2. Разобьем стержень на участки по месту действия сил и определим направление рассмотрения действия сил на участки.

I Z →

II Z ←

III Z←

**3 Найдем уравнения зависимости внутренних усилий от действия активных нагрузок.**

**Используя метод сечений.**

Правила знаков: для поперечных сил – правило правой руки, для моментов – правило дождя.

I Z → 0 – 1 м

$$Q = -q \cdot z_1 = -10z_1 \quad Z=0 \quad Q=0 \text{ КН}$$

$$Z=1 \quad Q= -10 \text{ КН}$$

$$M = -q \cdot z \cdot z / 2 = -10 \cdot z \cdot z / 2 \quad Z=0 \quad M=0 \text{ КН}$$

$$Z=1 \quad M= -5 \text{ КН}$$

II Z ← 0 – 2 м

$$Q = P_1 - R_b - P_2 = 4 - 1 - 6 = -3 - \text{const}$$

$$M = -P_1 \cdot (2 + z_2) + R_b \cdot (2 + z_2) + P_2 \cdot z_2 - M$$

$$M = -4 \cdot (2 + z_2) + 1 \cdot (2 + z_2) + 6 \cdot z_2 - 5 \quad Z=0 \quad M = -11 \text{ КН}$$

$$Z=2 \quad M = -5 \text{ КН}$$

III Z ← 0 – 2 м

$$Q = P_1 - R_b = 4 - 1 = 3 - \text{const}$$

$$M = -P_1 \cdot z_3 + R_b \cdot z_3$$

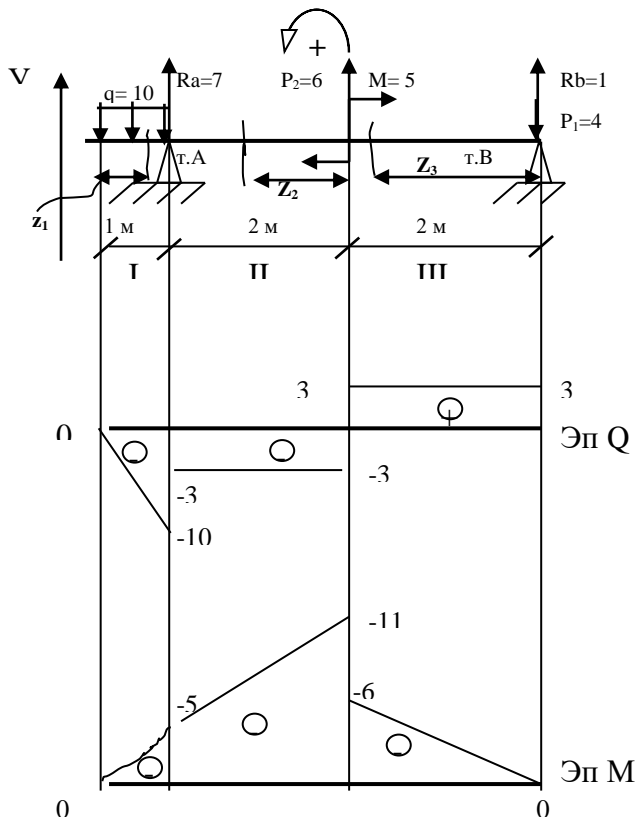
$$M = -4 \cdot z_3 + 1 \cdot z_3 \quad Z=0 \quad M=0 \text{ КН}$$

$$Z=2 \quad M= -6 \text{ КН}$$

**4 Построим эпюры**

*Замечания к построению эпюр Q и M:*

1. В сечениях где приложены сосредоточенные силы, на эпюре Q наблюдается скачок на величину этой силы, а на эпюре моментов, перелом совпадающий с направлением силы.
2. В сечении где приложены сосредоточенные пары сил, на эпюре M должен быть скачок на величину момента этой пары



### Решение задач с использованием теоремы Журавского

Дан стержень на двух опорах. Длина стержня 5 метров. По длине стержня приложены следующие нагрузки: поперечные силы  $P_1=4$  кН  $P_2 = 6$  кН, распределенная нагрузка  $q = 10$  кН/м. Изгибающий момент  $M = 5$  кН·м. Определить внутренние усилия действующие в поперечном сечении стержня. Построить эпюры.

Для решения поставленной задачи необходимо произвести расчет реакций опор. И затем, применив теорему Журавского

построить эпюры

#### 1 Расчет реакций опор.

Так как балка находится в равновесии то сумма моментов всех сил относительно любой точки стержня равно 0. записав уравнения равновесия моментов относительно точек опор (т. А , т В). Найдем искомые реакции.

$$\Sigma M_A(F)=0$$

$$q \cdot 1 \cdot 0,5 + P_2 \cdot 2 - M - P_1 \cdot 4 + R_b \cdot 4 = 0$$

$$10 \cdot 1 \cdot 0,5 + 6 \cdot 2 - 5 - 4 \cdot 4 + 4R_b = 0$$

$$R_b = 1 \text{ кН}$$

$$\Sigma M_B(F)=0 \quad q \cdot 1 \cdot 4,5 - 4R_a - P_2 \cdot 2 - M = 0$$

$$10 \cdot 1 \cdot 4,5 - 4R_a - 6 \cdot 2 - 5 = 0$$

$$R_a = 7 \text{ кН}$$

Произведем проверку найденных реакций.

#### Проверка

$$\Sigma F_y = 0; \quad -q \cdot 1 + R_a + P_2 + R_b - P_1 = 0$$

$$-10 + 7 + 6 + 1 - 4 = 0$$

$$-14 + 14 = 0 !!!$$

Найдем поперечные силы  $Q$  на первом участке. Производим разрез и применяем правило с распределенной нагрузкой  $Q_{\text{кон}} = Q_{\text{нач}} + \omega q \cdot n$  Знаки определяются проецированием на ось  $Y$   
 $Z \rightarrow 0-1$

$$Q_{\text{кон}} = 0 - 10 \cdot 1 = -10 \text{ КН}$$

из 2 следствия.

Так как линия  $q$ , линия 0 степени то  $Q$  наклонная (линия 2 степени). – Построим эпюру.

На втором участке

Используются только силы еще не участвующие в реакциях. Формула  $Q_{\text{кон}} = Q_{\text{нач}} + P$

$$Z \rightarrow 0-2$$

$$Q_{\text{кон}} = -10 + 7 = -3 \text{ КН}$$
 из второго следствия линия параллельна оси.

На третьем участке.

$$Z \rightarrow 0-2$$

Используются только силы еще не участвующие в реакциях. Формула  $Q_{\text{кон}} = Q_{\text{нач}} + P$

$$Q_{\text{кон}} = -3 + 6 = 3$$
 из второго следствия линия параллельна оси.

Найдем моменты на 1 участке, используя формулу  $M_{\text{кон}} = M_{\text{нач}} + \omega Q^n$

$$Z \rightarrow 0-1$$

$M_{\text{кон}} = 0 + 1/2 \cdot a \cdot H = 0 + 1/2 \cdot 1 \cdot (-10) = -5$  Эпюра строится в верхней плоскости (т.к. -). Из второго следствия линия 2 степени (парабола) используя 3 следствие, строим эпюру с правильной выпуклостью.

Найдем моменты на 2 участке, используя формулу  $M_{\text{кон}} = M_{\text{нач}} + \omega Q^n$

$$Z \rightarrow 0-2$$

$$M_{\text{кон}} = -5 + = -5 + 2 \cdot (-3) = -11$$
 из второго следствия линия 1 степени

Найдем моменты на 3 участке, используя формулы  $M_{\text{кон}} = M_{\text{нач}} + M_0$   $M_{\text{кон}} = M_{\text{нач}} + \omega Q^n$

$$\text{Следовательно } M_{\text{кон}} = M_{\text{нач}} + M_0 + \omega Q^n$$

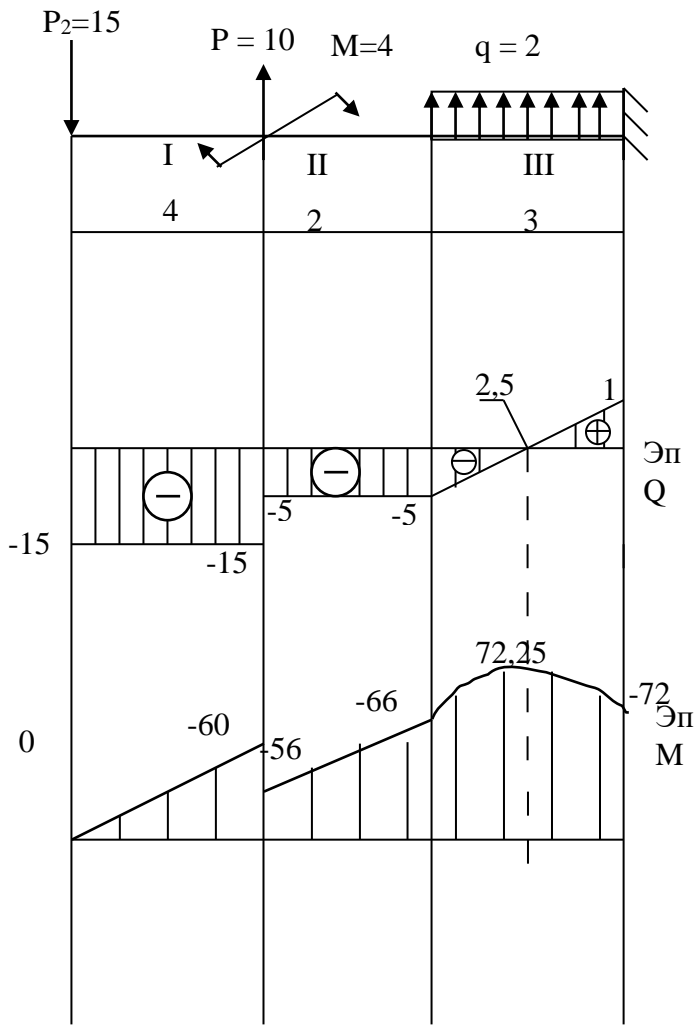
$$Z \rightarrow 0-2$$

$M_{\text{кон}} = -11 + 3 \cdot 2 + 5 = 0$  из второго следствия линия 1 степени. В точке где приложен момент (из 1 следствия) происходит скачок на величину момента Знак по часовой стрелке положителен.

*Пример: 2*

Дан консольный стержень с приложенными к нему активными нагрузками:  $P = 10 \text{ КН}$   $P_2 = 15 \text{ КН}$ , сосредоточенной парой сил  $M = 4 \text{ КН/м}$ ,  $q = 2 \text{ КН/м}$ . Используя следствия теоремы Журавского рассчитать эпюры поперечных сил и моментов.

Так как балка находится на одной опоре, то реакции опор не находим, но рассматриваем систему со свободного конца.



1 участок Найдем поперечные силы Q на первом участке. Производим разрез и применяем правило с распределенной нагрузкой

$$Q_{\text{кон}} = Q_{\text{нач}} + P$$

Знаки определяются проецированием на ось Y

I Z → 0-4

$$Q_{\text{кон}} = 0 - 15 = -15 \text{ КН}$$

Построим эпюру.

На втором участке

II Z → 0-2

$$Q_{\text{кон}} = -15 + 10 = -5 \text{ КН}$$

Построим эпюру.

III Z → 0-3

$$Q_{\text{кон}} = Q_{\text{нач}} + \omega Q^n$$

$$Q_{\text{кон}} = -5 + 2 \cdot 3 = +1 \text{ КН} \text{ —наклонная прямая (из}$$

второго следствия)

Построим эпюру.

Эпюра пересекается центральной осью в на расстоянии x от начала участка. Найдем точку пересечения из подобия треугольников

$$5/x = 1/(3-x)$$

$$15 - 5x = x$$

$$6x = 15$$

$$x = 2,5$$

Обозначим расстояние на эпюре.

Найдем моменты на 1 участке, используя формулу

$$M_{\text{кон}} = M_{\text{нач}} + \omega Q^n$$

I Z → 0-4

$M_{\text{кон}} = 0 + 4 \cdot (-15) = -60$  Эпюра строится в верхней плоскости (т.к. -). Из второго следствия линия 1 степени (наклонная прямая).

Найдем моменты на 2 участке, используя формулу

$$M_{\text{кон}} = M_{\text{нач}} + \omega Q^n$$

II Z → 0-2

Из первого следствия

$$M_{\text{кон}} = M_{\text{нач}} + M_0$$

$$M_{\text{нач}} = -60 + 4 = -56$$

$M_{\text{кон}} = -56 + (-5) \cdot 2 = -66$  Эпюра строится в верхней плоскости (т.к. -). Из второго следствия линия 1 степени

Найдем моменты на 3 участке, используя формулу

III  $Z \rightarrow 0-3$

$M_{\text{кон}} = -66 + 1/2 * 2,5 * (-5) + 1/2 * 0,5 * 1 = -72$  Эпюра строится в верхней плоскости (т.к. -). Из второго следствия линия 1 степени (наклонная прямая).

Найдем точку перегиба.

$M_{\text{точки}} = -66 + 1/2 * 2,5 * (-5) = -72,25$ .

## Определение напряжений по высоте сечения при изгибе

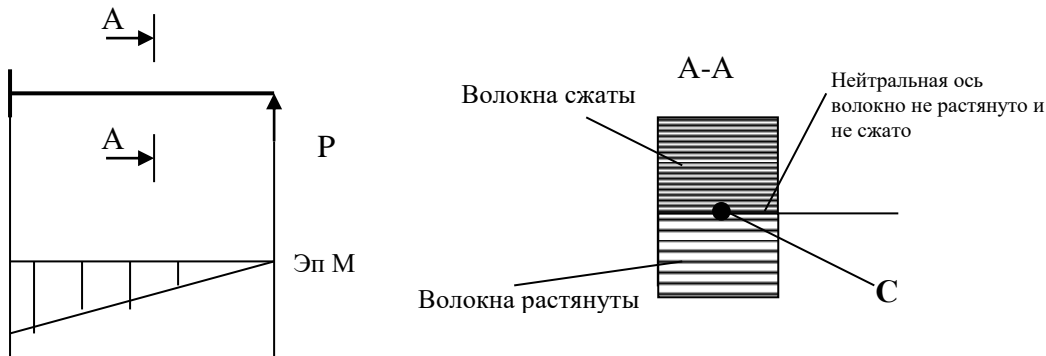
### 1) Нормальные напряжения при изгибе

При изгибе по высоте сечения одни волокна растягиваются, другие сжимаются. Следовательно, имеется плоскость в которой волокна не растянуты и не сжаты, т.е. находятся в покое. Эта плоскость всегда проходит через центр тяжести сечения. А волокно которое не деформируется - называется нейтральной осью

Нейтральная ось всегда является одной из главных центральных осей инерции сечения.

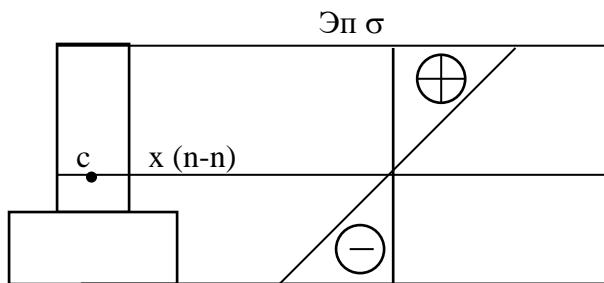
Положение растянутых и сжатых волокон определяется при помощи эпюры изгибающего момента по следующему правилу. Если эпюра изгибающего момента сечения лежит выше нейтральной оси то растянуты верхние волокна если ниже то растянуты нижние волокна.

Например: Дана квадратная балка с заземленным концом. На данную балку воздействует активная нагрузка, величиной  $P$ . Рассмотрим сечение балки (разрез А-А)



Как мы знаем при растяжении или сжатии всегда возникают нормальные напряжения.

Рассмотрим сечение таврового типа, у которого верхние волокна растянуты, а нижние сжаты. Нейтральная ось  $x$ . Изгибающий момент действующий в сечении и момент инерции сечения равны  $M$  и  $I_x$  соответственно. Определим нормальные напряжения по высоте сечения.



В любой точке сечения нормальные напряжения можно определить следующим образом: провести через интересующую нас точку секущую плоскость и определить напряжения по формуле.



$$\sigma = \pm \frac{M \cdot y}{I_x}$$

где  $y$  – расстояние от оси  $x$  до секущей плоскости.

$M$  – изгибающий момент в данном сечении,

$I_x$  – Момент инерции относительно оси  $x$ .

Таким образом, изгибающий момент  $M$  и момент инерции  $I_x$  постоянны, следовательно нормальные напряжения в сечении прямо пропорционально зависят только от расстояния  $y$ , и чем дальше от нейтральной оси, тем  $\sigma$  больше. Откуда эпюра нормальных напряжений имеет следующий вид.

На эпюру нормальных напряжений не влияет ширина сечения, а значит, в точках перехода нормальные напряжения ищутся по той же формуле нормальных напряжений.

## 2) Касательные напряжения при изгибе.

Касательные напряжения в теле возникают тогда, когда частицы тела подвергаются сдвигу.

Касательные напряжения в любой точке сечения находятся по следующей формуле

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{n-n}^{отс}}{I_x b} \quad - \text{ формула Журавского}$$

Где  $Q$  - действующая в сечении поперечная сила,

$S_{n-n}^{отс}$  - статический момент отсеченной части,

$I_x$  - момент инерции относительно нейтральной оси  $x$ ,

$b$  – ширина сечения в секущей плоскости

Для определения касательных напряжений в любой плоскости сечения нужно в искомом месте провести секущую плоскость. Вычислить статический момент отсеченной части и расстояние  $b$ .

Величина касательных напряжений в основном зависит от толщины сечения ( $b$ ). Зависимость обратно пропорциональная.

Пример

Рассмотрим ранее исследуемый тавр. Найдем касательные напряжения на расстоянии  $L$  от центральной оси и в точке перехода от широкой части сечения к узкой.

1 Проводим секущую плоскость I-I, на расстоянии  $L$  от центральной оси.

2 Найдем статический момент  $S_{n-n}^{отс} = Ay$

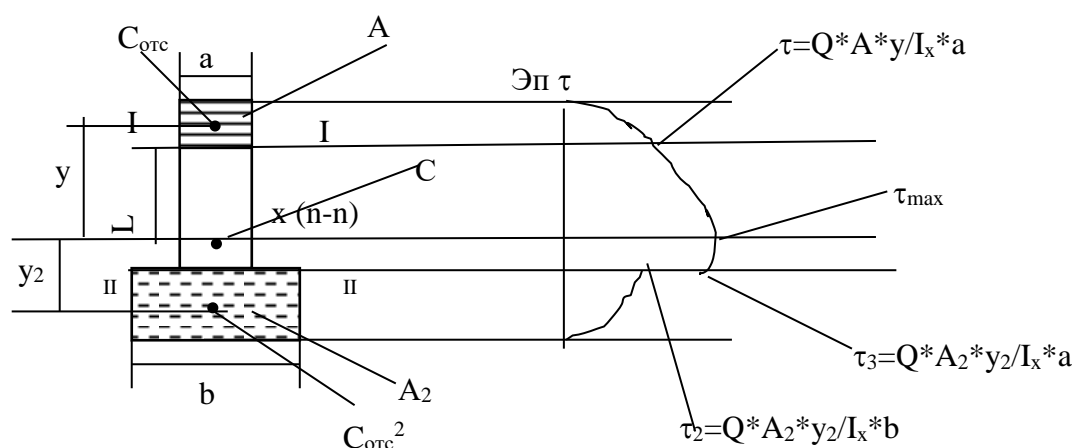
3 Найдем касательные напряжения  $\tau = Q \cdot A \cdot y / I_x \cdot a$

Найдем касательные напряжения в точке перехода

Проводим секущую плоскость II-II, в точке перехода.

2 Найдем статический момент  $S_{n-n}^{отс} = A_2 y_2$

3 Найдем касательные напряжения  $\tau_2 = Q \cdot A_2 \cdot y_2 / I_x \cdot b$ , чуть выше касательные напряжения равны  $\tau_3 = Q \cdot A_2 \cdot y_2 / I_x \cdot a$  Величина  $a$  меньше  $b$  следовательно  $\tau_3$  больше  $\tau_2$ . Следовательно, в сечении с резким изменением ширины на эпюре  $\tau$  всегда наблюдается скачок.



### Полная проверка прочности балки

В сечениях с резким изменением по ширине требуется дополнительная проверка точек перехода т.к. зачастую разрушение происходит именно в этих точках а не в периферийных волокнах с наибольшими нормальными напряжениями.

Для пластичных материалов используют III либо IV гипотезы прочности.

$$\sigma^{III}_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_{пер}^2 + 4\tau_{пер}^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma^{IV}_{экв} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma_{пер}^2 + 3\tau_{пер}^2} \leq [\sigma]$$

Для хрупких материалов если волокна точек перехода растянуты используют I гипотезу прочности

$$\sigma^I_{экв} = \sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_{пер} + \sqrt{\sigma_{пер}^2 + 4\tau_{пер}^2} \right) \leq [\sigma_{разрыва}]$$

Либо II гипотезу прочности

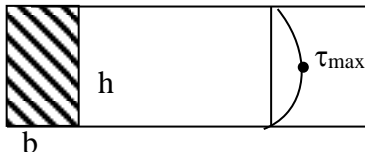
$$\sigma^{II}_{экв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-\mu}{2} \sigma_{пер} + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma_{пер}^2 + 4\tau_{пер}^2} \leq [\sigma]$$

Для определения эквивалентных напряжений в точках перехода как растянутых так и сжатых волокон хрупких и пластичных материалов удобно применять теорию прочности Мора

$$\sigma_{\text{Мора экв}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{сж}]} \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{сж}]} \right) \sigma_{\text{пер}} + \left( 1 + \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{сж}]} \right) \sqrt{\sigma_{\text{пер}}^2 + 4\tau_{\text{пер}}^2} \right] \leq [\sigma_p]$$

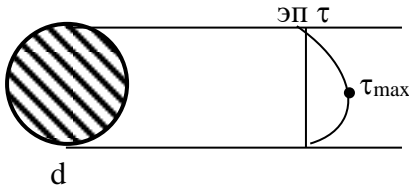
### Определение касательных напряжений в простых сечениях

При определении максимальных касательных напряжений в простых сечениях удобно пользоваться упрощенными формулами.



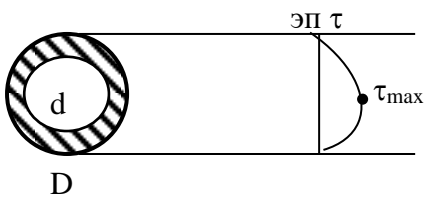
Прямоугольник

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$$



Круг

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}$$



Кольцо

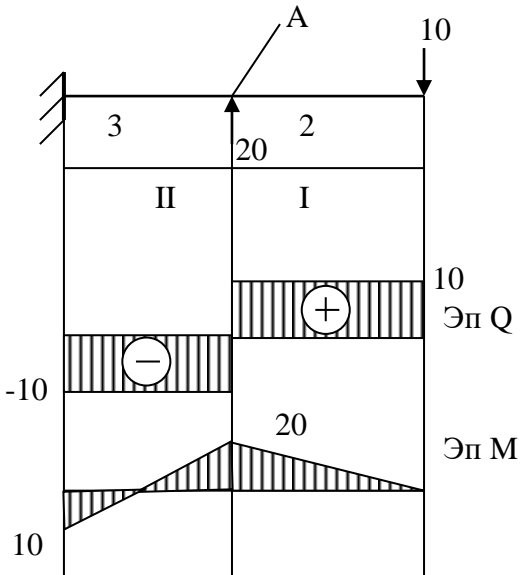
$$\tau_{\max} = \frac{2Q}{A}$$



Лекция 19

Задачи по определению напряжений в балке при изгибе

Дана балка длиной 5м. Определить напряжения в т. А. Построить эпюры напряжений. Определить напряжения на расстоянии 1 см от центра тяжести сечения и в точках перехода.

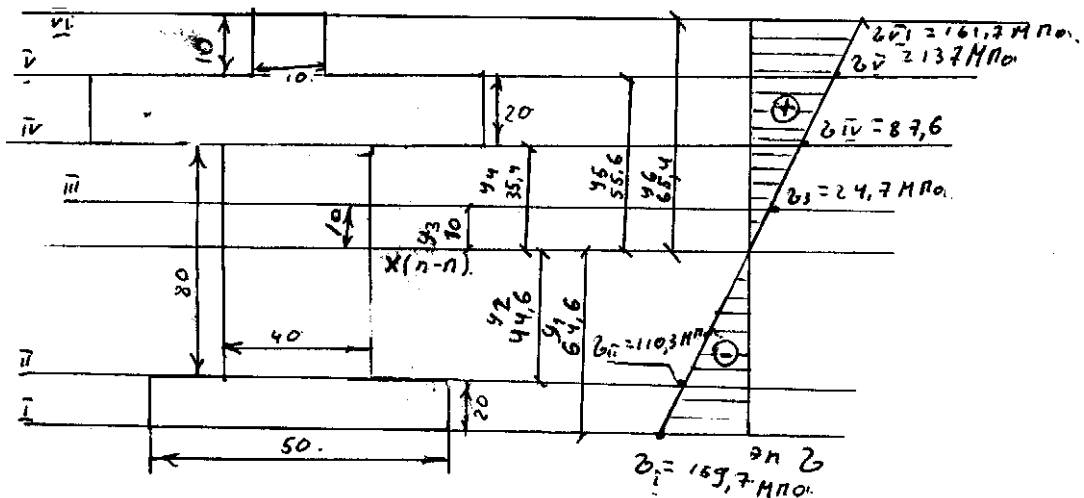


1) Построим эпюры Q и M.

$I \ Z \leftarrow 0-2$   
 $Q = 10 - \text{const}$   
 $M = -10z$   
 $Z = 0 \ M = 0$   
 $Z = 2 \ M = -20$   
 $II \ Z \leftarrow 0-3$   
 $Q = 10 - 20 = -10 - \text{const}$   
 $M = -10(2+z) + 20z$   
 $Z = 0 \ M = -20$   
 $Z = 3 \ M = 10$

2) Так как нужно найти напряжения в т. А. Выпишем значения поперечной силы Q и изгибающего момента M в т. А.

$Q = 10 \text{ кН}$   
 $M = -20 \text{ кН} \cdot \text{м} = 2000 \text{ кН} \cdot \text{см}$



1) Определим центр тяжести сечения.

$$y_c = \frac{\sum S_u}{\sum A_i} = \frac{2*5*1 + 4*8*6 + 7*2*11 + 1*1*12,5}{2*5 + 4*8 + 7*2 + 1*1} = \frac{368,5}{57} = 6,46 \text{ см}$$

2) Определим момент инерции сечения.

$$I_x = \sum (I_{x0} + Aa^2) = \left( \frac{5*2^3}{12} + 2*5*5,46^2 \right) + \left( \frac{4*8^3}{12} + 4*8*0,46^2 \right) + \left( \frac{7*2^3}{12} + 7*2*4,54^2 \right) + \left( \frac{1*1^3}{12} + 1*1*6,04^2 \right) = 301,43 + 177,43 + 293,2 + 36,6 = 808,66 \text{ см}^4$$

3) Рассчитаем нормальные напряжения  $\sigma$ , для чего в интересующих нас точках сечения проведем секущие плоскости.

$$\sigma = \pm \frac{M}{I_x} \cdot y$$

$$y_1 = 6,46 \text{ см}$$

$$\sigma_1 = 2000 * 6,46 / 808 = 15,97 \text{ КН/см}^2 = 159,7 \text{ МПа}$$

$$y_2 = 6,46 - 2 = 4,46 \text{ см}$$

$$\sigma_2 = 2000 * 4,46 / 808 = 11,03 \text{ КН/см}^2 = 110,3 \text{ МПа}$$

$$y_3 = 1 \text{ см}$$

$$\sigma_3 = 2000 * 1 / 808 = 2,47 \text{ КН/см}^2 = 24,7 \text{ МПа}$$

$$y_4 = 10 - 6,46 = 3,54 \text{ см}$$

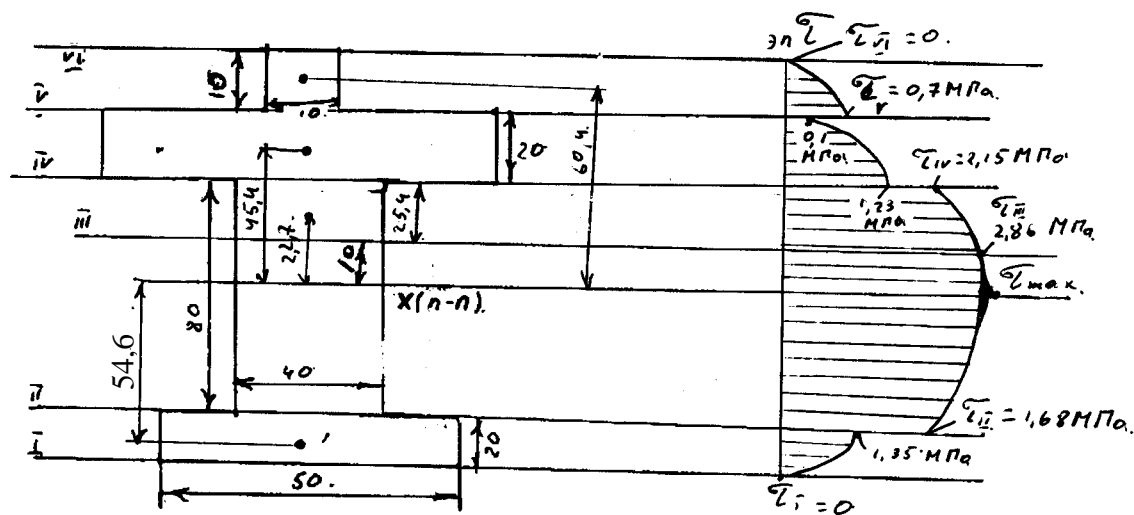
$$\sigma_4 = 2000 * 3,54 / 808 = 8,76 \text{ КН/см}^2 = 87,6 \text{ МПа}$$

$$y_5 = 12 - 6,46 = 5,56 \text{ см}$$

$$\sigma_5 = 2000 * 5,56 / 808 = 13,7 \text{ КН/см}^2 = 137 \text{ МПа}$$

$$y_6 = 13 - 6,46 = 6,54 \text{ см}$$

$$\sigma_6 = 2000 * 6,54 / 808 = 16,17 \text{ КН/см}^2 = 161,7 \text{ МПа}$$



Построим эпюры касательных напряжений  $\tau$ .

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{n-n}^{отс}}{I_x b}$$

На поверхности касательные напряжения всегда равны 0

$$\tau_1 = 0, \tau_6 = 0.$$

Статический момент части отсеченной плоскостью II равен

$$S_{x=yA}^{отс} = 2 \cdot 5 \cdot 5,46 = 54,6 \text{ см}^3$$

$$\tau_2 = 10 \cdot 54,6 / 808 \cdot 5 = 0,135 \text{ КН/см}^2 = 1,35 \text{ МПа}$$

$$\tau_2 = 10 \cdot 54,6 / 808 \cdot 4 = 0,168 \text{ КН/см}^2 = 1,68 \text{ МПа}$$

Статический момент части отсеченной плоскостью III равен

$$S_{x=yA}^{отс} = \Sigma yA = (1 \cdot 1 \cdot 6,04) + (7 \cdot 2 \cdot 4,54) + (2,54 \cdot 4 \cdot 2,27) = 92,6 \text{ см}^3$$

$$\tau_3 = 10 \cdot 92,6 / 808 \cdot 4 = 0,286 \text{ КН/см}^2 = 2,86 \text{ МПа}$$

Статический момент части отсеченной плоскостью IV равен

$$S_{x=yA}^{отс} = \Sigma yA = (1 \cdot 1 \cdot 6,04) + (7 \cdot 2 \cdot 4,54) = 69,6 \text{ см}^3$$

$$\tau_4 = 10 \cdot 69,6 / 808 \cdot 4 = 0,215 \text{ КН/см}^2 = 2,15 \text{ МПа}$$

$$\tau_4 = 10 \cdot 69,6 / 808 \cdot 7 = 0,123 \text{ КН/см}^2 = 1,23 \text{ МПа}$$

Статический момент части отсеченной плоскостью V равен

$$S_{x=yA}^{отс} = \Sigma yA = 1 \cdot 1 \cdot 6,04 = 6,04 \text{ см}^3$$

$$\tau_5 = 10 \cdot 6,04 / 808 \cdot 1 = 0,07 \text{ КН/см}^2 = 0,7 \text{ МПа}$$

$$\tau_5 = 10 \cdot 6,04 / 808 \cdot 7 = 0,01 \text{ КН/см}^2 = 0,1 \text{ МПа}$$

## Лекция 21

### Определение перемещений при изгибе

#### Основные понятия

Одной из задач сопротивления материалов является оценка жесткости конструкции, т.е. степени ее искажения под действием нагрузки. Если балка под нагрузкой сильно прогибается, то при ее эксплуатации появятся затруднения.

Расчет на жесткость элемента конструкции, имеющего форму бруса, заключается в определении наибольших угловых и линейных упругих перемещений его поперечных сечений при заданной нагрузке и сопоставлении их с допускаемыми, зависящими от назначения и условий эксплуатации данного элемента. Иными словами условие жесткости можно выразить неравенством:

$$\delta < [\delta], \theta < [\theta]$$

где  $\delta$  - линейное перемещение рассматриваемого сечения, возникающие под нагрузкой,

$\theta$  - угловое перемещение рассматриваемого сечения, возникающие под нагрузкой,

$[\delta]$  и  $[\theta]$  - допускаемые значения перемещений, назначаемые конструктором.

Пример: дана балка на двух опорах, с приложенной к ней вертикальной нагрузкой  $P$ .  
Определить вертикальное перемещение и угол поворота консольного конца балки.



Под действием нагрузки  $P$  Конец балки смещается вниз на расстояние  $\delta$ , образуя угол поворота  $\theta$ .

Определение перемещения необходимо:

- 1) При расчете элементов конструкции на жесткость
- 2) Для сравнения с действительными прогибами, с целью оценки надежности конструкции.
- 3) Для расчета статически неопределимых систем, работающих на изгиб.

*Способы определения перемещения:*

- 1) Аналитический – применяется при необходимости определения перемещений во многих точках сечения.
- 2) Графический.



- 3) Графоаналитический.
- 4) Энергетический.
- 5) Метод Максвелла-Мора.
- 6) Прием Верещагина (частный случай метода Максвелла-Мора).

### Метод Максвелла-Мора

Существует несколько способов определения перемещений поперечных сечений при изгибе. Если не требуется знание уравнения изогнутой линии бруса, а необходимо определить только линейные или угловые перемещения отдельного сечения, удобнее всего воспользоваться методом Максвелла-Мора. Метод применяется как в прямолинейных, так и в криволинейных конструкциях.

Для балок и плоских рам интеграл Мора имеет вид:

$$\delta(\theta) = \sum \int_0^z \frac{mM_p}{EI_x} dz$$

где  $\delta(\theta)$  - искомое перемещение (линейное или угловое);

$M_p, m$  - аналитические выражения изгибающих моментов соответственно от заданной и единичной силы;

$EI_x$  - жесткость сечения балки в плоскости изгиба.

При определении перемещений нужно рассматривать два состояния системы:

I - действительное (грузовое) состояние, с приложенной внешней нагрузкой;

II - вспомогательное состояние, в котором балка освобождается от внешней нагрузки, а к сечению, перемещение которого определяется, прикладывается единичная сила, если определяется линейное перемещение, или единичный момент, если определяется угловое.

Определение перемещений с помощью полученной формулы производится в следующем порядке:

1) находятся выражения усилий  $M$  и  $Q$  от заданной нагрузки как функции координаты  $z$  произвольного сечения;

2) по направлению искомого перемещения прикладывается соответствующая ему единичная сила (при линейном перемещении — сосредоточенная сила, при угле поворота — сосредоточенный момент);

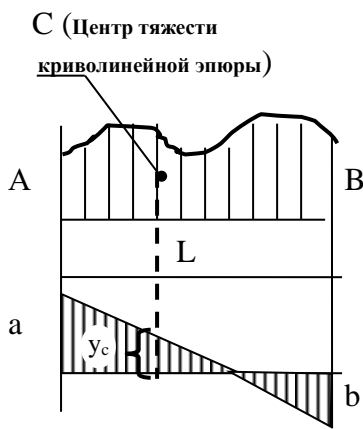
3) определяются усилия  $m$  от единичной силы как функции координаты  $z$  произвольного сечения;

- 4) найденные аналитические выражения усилий  $M_p$  и  $m$  подставляются в формулу Максвелла - Мора и интегрированием по участкам в пределах всей конструкции определяется искомое перемещение

Если значение перемещения положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательно, то противоположно этому направлению.

### Прием Верещагина

Иногда при определении перемещений не криволинейных элементов удобно пользоваться правилом Верещагина.



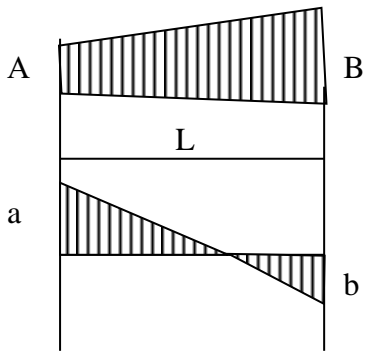
$$\delta(\theta) = \Sigma \frac{\omega \cdot y_c}{EI_x}$$

- Формула Верещагина

Где  $\omega$  - Площадь криволинейной эпюры (она может быть и прямолинейной).  
 $y_c$  – ордината на эпюре моментов от единичной силы взятая под центром тяжести криволинейной эпюры.

Если определение площади и центра тяжести криволинейной эпюры затруднительно, то пользуются следующими правилами перемножения эпюр

а) Правило трапеции

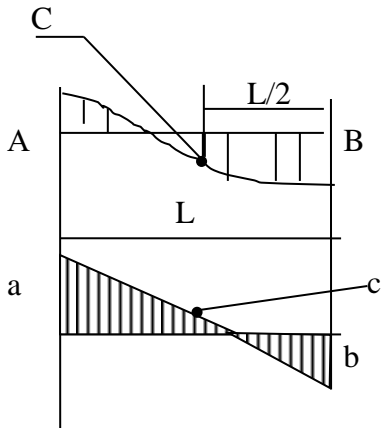


Используется в тех случаях, когда участок от грузовой эпюры прямолинеен.

$$\delta(\theta) = \frac{L}{6} (\pm 2Aa \pm 2Bb \pm Ab \pm Ba)$$

Знаки берутся в соответствии с расчетными значениями.

б) Правило Симпсона



Используется в тех случаях, когда участок от грузовой эпюры криволинеен.

$$\delta(\theta) = \frac{L}{6} (\pm Aa \pm Bb \pm 4Cc)$$

где  $C$  и  $c$  – значение грузовой и единичной эпюры на середине участка  $L/2$ .

### Метод начальных параметров (строка Бубнова)

Данный метод применяют если необходимо найти перемещения нескольких точек

Для этого находят уравнение, решение которого дает значение перемещения

$$\delta EI = \delta_0 EI + \Theta_0 EI + \sum M \frac{(x - a_m)^2}{2!} + \sum P \frac{(x - a_p)^3}{3!} + \sum q_{a_q} \frac{(x - a_q)^4}{4!} - \sum q_{b_q} \frac{(x - b_q)^4}{4!} +$$

$$+ \sum q'_{a_q} \frac{(x - a_q)^5}{5!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x - b_q)^5}{5!} + \dots;$$

$$\Theta EI = \Theta_0 EI + \sum M(x - a_m) + \sum P \frac{(x - a_p)^2}{2!} + \sum q_{a_q} \frac{(x - a_q)^3}{3!} - \sum q_{b_q} \frac{(x - b_q)^3}{3!} +$$

$$+ \sum q'_{a_q} \frac{(x - a_q)^4}{4!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x - b_q)^4}{4!} + \dots;$$

Где  $\delta$ ,  $\theta$ , линейное и угловое перемещение в искомых точках (сечениях).

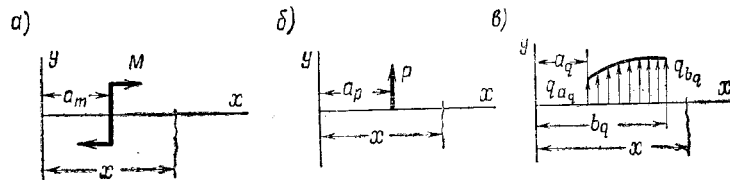
$a_m$  – расстояние от начала координат до сосредоточенного момента

$a_p$  – расстояние от начала координат до сосредоточенной силы

$a_q$ ,  $b_q$  – расстояние от начала координат до начала и конца распределенной нагрузки

$M$ ,  $P$ ,  $q$  – изгибающий момент, сосредоточенная и равномерно распределенная нагрузка

$q'$ ,  $q''$  – производная от линейной и квадратично распределенной нагрузки



После составления уравнений определяют начальные параметры  $\delta_0$ , и  $\theta_0$ . Для чего:

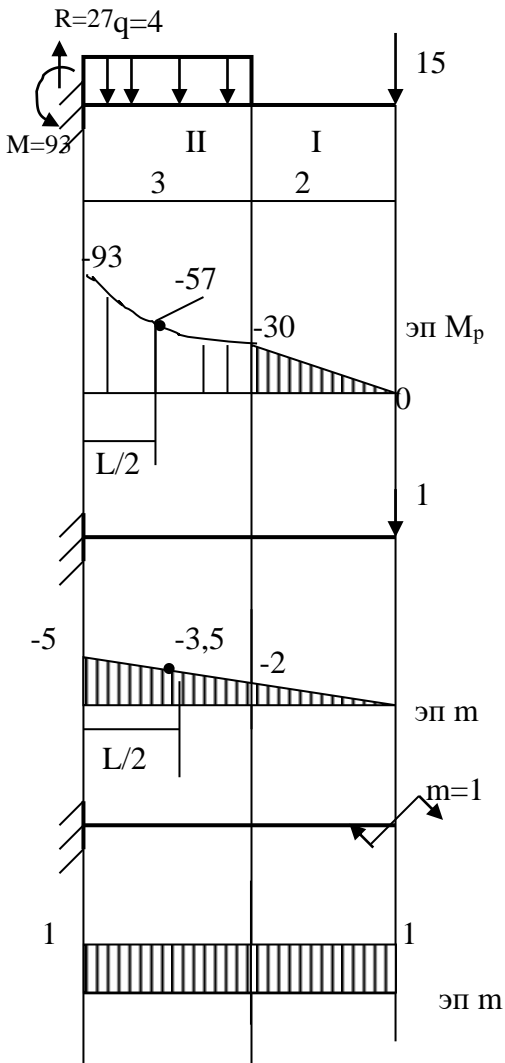
- 1- если балка двухопорная - производят поиск перемещений в одной и другой опоре приравнивая затем эти уравнения к нулю (т.к. реальных перемещений там нет)

- 2- если консоль - составляют уравнения углового и линейного перемещения для опорного сечения приравнявая затем их к нулю (т.к. в заземлении любые перемещения отсутствуют).

Пример:

Определить Перемещение  $\delta$  и угол поворота  $\theta$  свободного конца консольной балки. Если известно, что балка прямоугольной формы  $H=30$ ,  $b=20$ см. Материал сталь модуль упругости  $2 \cdot 10^5$  МПа

Для определения перемещения какой то точки балки, нужно в эту точку подставить единичную нагрузку. И построив грузовую и единичную эпюру воспользоваться методом Максвела-Мора или приемом Верещагина



1) построим грузовую эпюру  $M$ .

I  $z \leftarrow 0-2$ м

$M = -15z$

$Z=0 \quad M=0$

$Z=2 \quad M=-30$

II  $z \leftarrow 0-3$ м

$M = -15 \cdot (2+z) - 4 \cdot z^2 / 2 = -30 - 15z - 2z^2$

$Z=0 \quad M=-30$

$Z=3 \quad M=-93$

$Z=1,5 \quad M=-57$

2) Построим эпюру от единичной нагрузки.

I  $z \leftarrow 0-2$ м

$M = -z$

$Z=0 \quad M=0$

$Z=2 \quad M=-2$

II  $z \leftarrow 0-3$ м

$M = -1 \cdot (2+z)$

$Z=0 \quad M=-2$

$Z=3 \quad M=-5$

$Z=1,5 \quad M=-3,5$

Рассчитаем перемещение, используя метод Максвела-Мора.

$$\delta(\theta) = \sum \int_z^0 \frac{mM_p}{EI_x} dz$$

$$\begin{aligned} \delta EI_x &= \int_2^0 -15z \cdot (-z) dz + \int_3^0 (-30 - 15z - 2z^2) \cdot (-2 - z) dz = \int_2^0 15z^2 dz + \int_3^0 (60 + 30z + 30z + 15z^2 + 4z^2 + 2z^3) dz = \\ &= \int_2^0 15z^2 dz + \int_3^0 (60 + 60z + 19z^2 + 2z^3) dz = \frac{15z^3}{3} /_2^0 + 60z + \frac{60z^2}{2} + \frac{19z^3}{3} + \frac{2z^4}{4} /_3^0 = 40 + 661,5 = 701,5 \end{aligned}$$

Рассчитаем по Верещагину

$$\delta EI_x = \frac{2}{6} (2 * 0 * 0 + 2 * 2 * 30 + 2 * 0 + 0 * 30) + \frac{3}{6} (30 * 2 + 93 * 5 + 4 * 57 * 3,5) = 40 + 661,5 = 701,5$$

Расчет методом начальных параметров.

Рассчитаем реакции в опоре (делать обязательно)

$$M=93\text{КН}\cdot\text{м}, R=27\text{КН}$$

При расчете принимаем правило дождя (т.е. если усилие положительное то знак уравнения остается прежним если отрицательное то знак в уравнении меняем)

Рассматривая каждый участок производим на нем разрез. В расчете участвуют только те силы которые видны на оставленной части балки.

$$\delta EI = \underbrace{\delta_0 EI + \Theta_0 EI - \sum M \frac{(x)^2}{2!} + \sum R \frac{(x-0)^3}{3!} - \sum q_{a_q} \frac{(x-0)^4}{4!}}_{\text{I участок } 0\text{м} < x < 3\text{м}} + \underbrace{\sum q_{b_q} \frac{(x-3)^4}{4!}}_{\text{II участок } 3\text{м} < x < 5\text{м}}$$

$$\delta EI = \underbrace{\delta_0 EI + \Theta_0 EI - 93 \frac{(x)^2}{2} + 27 \frac{(x)^3}{6} - 4 \frac{(x)^4}{24}}_{\text{I участок } 0\text{м} < x < 3\text{м}} + \underbrace{4 \frac{(x-3)^4}{24}}_{\text{II участок } 3\text{м} < x < 5\text{м}}$$

$$\Theta EI = \underbrace{\Theta_0 EI - M(x-0) + R \frac{(x-0)^2}{2!} - q_{a_q} \frac{(x-0)^3}{3!}}_{\text{I участок } 0\text{м} < x < 3\text{м}} + \underbrace{q_{b_q} \frac{(x-3)^3}{3!}}_{\text{II участок } 3\text{м} < x < 5\text{м}}$$

$$\Theta EI = \underbrace{\Theta_0 EI - 93(x) + 27 \frac{(x)^2}{2} - 4 \frac{(x)^3}{6}}_{\text{I участок } 0\text{м} < x < 3\text{м}} + \underbrace{4 \frac{(x-3)^3}{6}}_{\text{II участок } 3\text{м} < x < 5\text{м}}$$

Найдем начальные параметры  $\delta_0$  и  $\Theta_0$ . Балка консольная найдем угловое и линейное перемещение опорного сечения затем приравняв полученные уравнения к нулю (опорное сечение консоли не имеет угловых и линейных перемещений).

$$\Theta EI = \Theta_0 EI - 93(0) + 27 \frac{(0)^2}{2} - 4 \frac{(0)^3}{6} = 0$$

$$\Theta_0 EI = 0$$

$$\delta EI = \delta_0 EI + 0 - 93 \frac{(0)^2}{2} + 27 \frac{(0)^3}{6} - 4 \frac{(0)^4}{24} = 0$$

$$\delta_0 EI = 0$$

Итоговые уравнения

$$\delta EI = -93 \frac{(x)^2}{2} + 27 \frac{(x)^3}{6} - 4 \frac{(x)^4}{24} + 4 \frac{(x-3)^4}{24}$$

I участок  $0m < x < 3m$ 
II участок  $3m < x < 5m$

$$\Theta EI = -93(x) + 27 \frac{(x)^2}{2} - 4 \frac{(x)^3}{6} + 4 \frac{(x-3)^3}{6}$$

I участок  $0m < x < 3m$ 
II участок  $3m < x < 5m$

Рассчитаем перемещение  $X=5m$

$$\delta EI = -93 \frac{(5)^2}{2} + 27 \frac{(5)^3}{6} - 4 \frac{(5)^4}{24} + 4 \frac{(5-3)^4}{24}$$

$\delta EI = -701,5$  Знак минус говорит о перемещении вниз.

Расчеты тремя методами совпадают, следовательно, решение верно.

Рассчитаем перемещение.

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/М}^2$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = 0,2 \cdot 0,3^3 / 12 = 0,00045$$

$$\delta EI_x = 701,5$$

$$\delta \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0,00045 = 701,5$$

$$\delta = 0,008 \text{ м} = 8 \text{ мм}$$

Конец балки переместится на 8 мм

Для определения угла поворота  $\theta$  необходимо построить эпюры от единичного момента.

$$I \ z \leftarrow 0-2 \text{ м}$$

$$M = -M = -1 - \text{const}$$

$$II \ z \leftarrow 0-3 \text{ м}$$

$$M = -M = -1 - \text{const}$$

Рассчитаем угол поворота  $\theta$  по методу Максвелла-Мора

$$\theta EI_x = \int_2^0 -15z \cdot (-1) dz + \int_3^0 (-30 - 15z - 2z^2) \cdot (-1) dz = \int_2^0 15z dz + \int_3^0 (30 + 15z + 2z^2) dz = \frac{15z^2}{2} \Big|_2^0 + 30z + \frac{15z^2}{2} + \frac{2z^3}{3} \Big|_3^0 =$$

$$= 30 + 175,5 = 205,5$$

Произведем расчет по методу Верещагина

$$\delta EI_x = \frac{2}{6} (2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 30 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 30) + \frac{3}{6} (30 \cdot 1 + 93 \cdot 1 + 4 \cdot 57 \cdot 1) = 30 + 175,5 = 205,5$$

Произведем расчет методом начальных параметров

Для чего используем выведенное ранее уравнение  $X=5\text{м}$ .

$$\Theta EI = 93(5) + 27 \frac{(5)^2}{2} - 4 \frac{(5)^3}{6} + 4 \frac{(5-3)^3}{6}$$

$$\Theta EI = -205,47 \text{ - угол против часовой стрелки}$$

Рассчитаем угол поворота.

$$\delta EI_x = 205,5$$

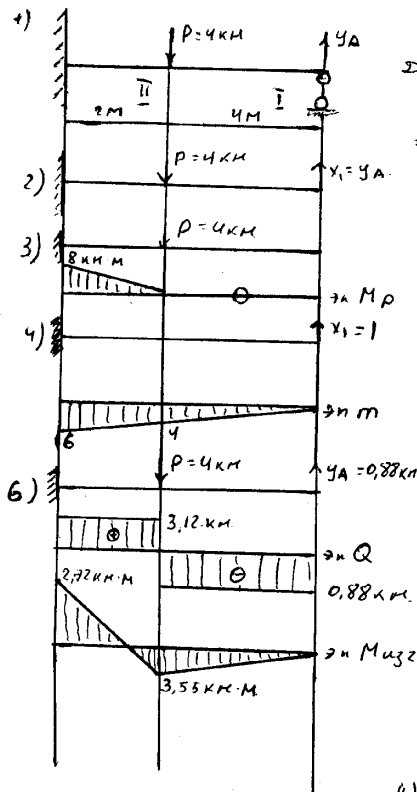
$$\theta * 2 * 10^8 * 0,00045 = 205,5$$

$$\theta = 0,0023 \text{ рад}$$

Конец балки повернется на угол 0,0023 рад



Определение внутренних усилий в статически неопределимых балках при изгибе



1) Найдём число лишних связей для балок без внутренних шарниров.  
 $A = C_{оп} - 3$

где  $C_{оп}$  - число реакции опор.  
 $A = 4 - 3 = 1$  лишняя связь

2) Освободим рассматриваемую балку от лишней связи заменив её внешней силой  $X_1$

3) Построим эпюры изгибающего момента только от нагрузок (освободимые связи  $X_1$  не учитывать)

I  $z < 0 \div 4$  м

$M_p = 0$

II  $z < 0 \div 2$  м

$M_p = -Pz \quad z=0 \quad M_p=0$

$z=2 \quad M_p = -8 \text{ кН·м}$

4) Построим эпюры моментов от внешней нагрузки  $X_1=1$ . Приложим ее активные силы не учитывая

I  $z < 0 \div 4$  м

II  $z < 0 \div 2$  м

$m = X_1 z \quad z=0 \quad m=0 \quad m=X_1(4+z)$

$z=4 \quad m=4 \quad z=0 \quad m=4$

5) Составим каноническое уравнение  $z=2 \quad m=6$

$\delta_{11} X_1 + \Delta_1 P = 0$

Найдём коэффициенты уравнения используя метод Верещагина

$\delta_{11} EJ = \sum \int_0^z m_1 m_1 dz \quad \delta_{11} EJ = \frac{4}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{2}{6} (2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 6) = 72$

$\Delta_1 PEJ = \sum \int_0^z m_1 M_p dz \quad \Delta_1 PEJ = \frac{2}{4} (2 \cdot 8 \cdot (-6) + 8 \cdot (-4)) = -64$

Подставим коэффициенты в уравнение найдём  $X_1$

$\frac{72}{EJ} X_1 - \frac{64}{EJ} = 0 \quad | \cdot EJ$

$72 X_1 - 64 = 0$

$X_1 = 0,888 \text{ кН} = 4a$

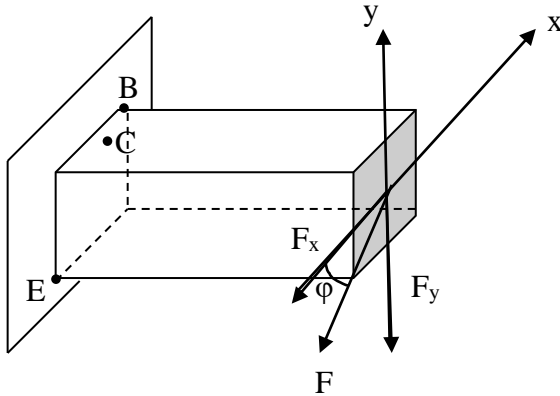
6) Построим систему эквивалентную заданной. Найдём канонические эпюры.

## Лекция

## СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### Косой изгиб

Косой изгиб возникает в том случае, когда внешние силы, перпендикулярные оси стержня, не лежат в плоскости, проходящей через главную ось его поперечного сечения сила  $F$  рис



При этом случае внешнюю силу  $F$  разложим в двух плоскостях  $x, y$

При этом  $F_x = F \cos \varphi$

$$F_y = F \sin \varphi$$

Возникающий в поперечном сечении изгибающий момент можно разложить на два изгибающих момента, действующих в плоскостях, проходящих через оси  $x, y$  сечения. Таким образом, косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских

изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях.

$$M_x = F_x l = F l \cos \varphi$$

$$M_y = F_y l = F l \sin \varphi$$

Найдем нормальные напряжения в т. С.

В данном случае в вертикальной плоскости в верхней половине балки (в том числе и в точке С) возникают растягивающие напряжения, в нижней половине балки — сжимающие

При этом по принципу независимости действия сил напряжения в точке С численно равны сумме напряжений от действия сил  $F_x$  и  $F_y$  в отдельности.

Напряжение от силы  $F_x$ , равно  $\sigma_x = M_x y_c / I_x$

$y_c$ -расстояние от оси  $x$  до т.С

Напряжение от силы  $F_y$ , равно  $\sigma_y = M_y x_c / I_y$

Полное напряжение в тС равно

$$\sigma_c = \sigma_x + \sigma_y$$

Если расстояние до наиболее удаленных точек сечения одинаково то наибольшие по значению напряжения возникающие в этих точках равны

$$\sigma = \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y,$$

Следовательно условие прочности при косом изгибе будет иметь вид

$$\sigma^{\max} = \sigma^{\max}_x + \sigma^{\max}_y = M_x y_{\max} / I_x + M_y x_{\max} / I_y \leq [\sigma]$$

Для хрупких материалов пределы прочности при растяжении и сжатии берутся различными.

Если расстояние до наиболее удаленных точек сечения одинаково (прямоугольник двутавр), то условие прочности при косом изгибе будет иметь вид.

$$\sigma_{\max} = \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y \leq [\sigma]$$

При подборе круглого сечения общий момент равен

$$M_{\text{общ}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$M_{x,y}$  – изгибающие моменты в горизонтальной и вертикальной плоскости

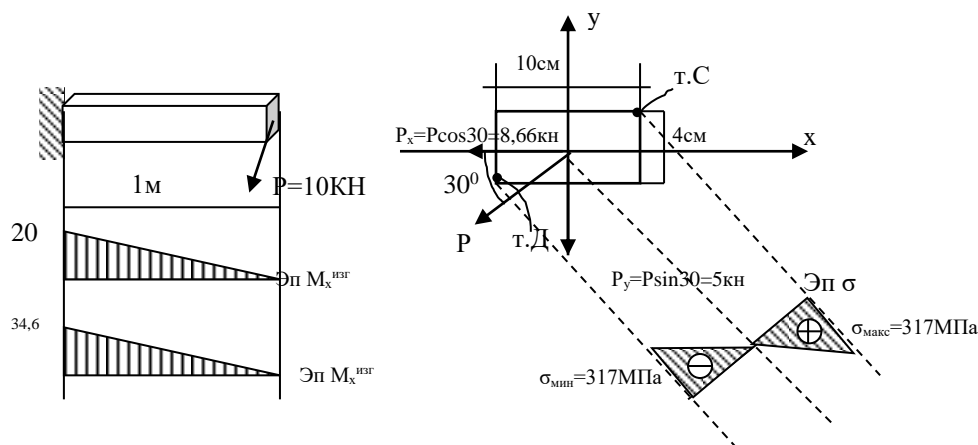
При расчете прогибов суммарный прогиб определяется как геометрическая сумма составляющих прогибов:

$$\delta_{\text{общ}} = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$$

$\delta_{x,y}$  – прогибы в горизонтальной и вертикальной плоскости

### Пример

Определить max и min нормальные напряжения возникающие в опасном сечении прямоугольной балки в результате воздействия силы  $P = 10$  кН, расположенной под углом  $30^\circ$  к горизонту



Разложим силу приложенную под углом на вертикальную и горизонтальную составляющую

$$P_x = P \cos 30^\circ = 8,66 \text{ кН}$$

$$P_y = P \sin 30^\circ = 5 \text{ кН}$$

Построим эпюры от изгибающих моментов от каждой составляющей в отдельности

$$M_x^{\text{изг}} = P_y \cdot l = 5 \cdot 1 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м} = 500 \text{ кН} \cdot \text{см}$$

$$M_{xy}^{\text{изг}} = P_x \cdot l = 8,66 \cdot 1 = 8,66 \text{ кН} \cdot \text{м} = 866 \text{ кН} \cdot \text{см}$$

Опасное сечение в месте заделки

Экстремальные напряжения лежат в т. С и Д.

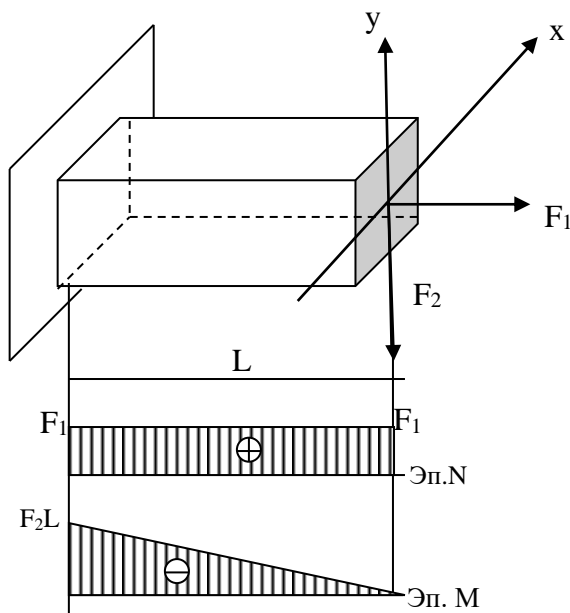
Нормальные Напряжения в т. равны С и Д

$$\sigma = M_x/W_x + M_y/W_y = 500/26,7 + 866/66,7 = 18,7 + 13 = 31,7 \text{ кН} \cdot \text{см}^2 = 317 \text{ МПа}$$

$$W_x = bh^2/6 = 10 \cdot 4^2/6 = 26,7 \text{ см}^3$$

$$W_y = 10^2 \cdot 4/6 = 66,7 \text{ см}^3$$

### Изгиб с растяжением (сжатием)



Дана балка испытывающая совместное действие изгиба и центрального растяжения Для определения суммарных напряжений используем принцип независимости действия сил. Растягивающие напряжения от силы  $F_1$  во всех точках поперечного сечения, как известно, равны и определяются по формуле

$$\sigma_{\text{раст}} = N/A = F_1/A$$

Напряжения от изгиба

$$\sigma_{\text{изг}} = M_{xy}/I_x$$

полное напряжение в любой точке сечения

$$\sigma = \pm \sigma_{\text{раст}} \pm \sigma_{\text{изг}} = \pm N/A \pm M_{xy}/I_x$$

Для стержней, одинаково работающих на растяжение и сжатие, условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{max}} = N/A + M_{xy_{\text{max}}}/I_x = N/A + M_x/W_x \leq [\sigma]$$

В случае сочетания растяжения с косым изгибом напряжения определяют по формуле

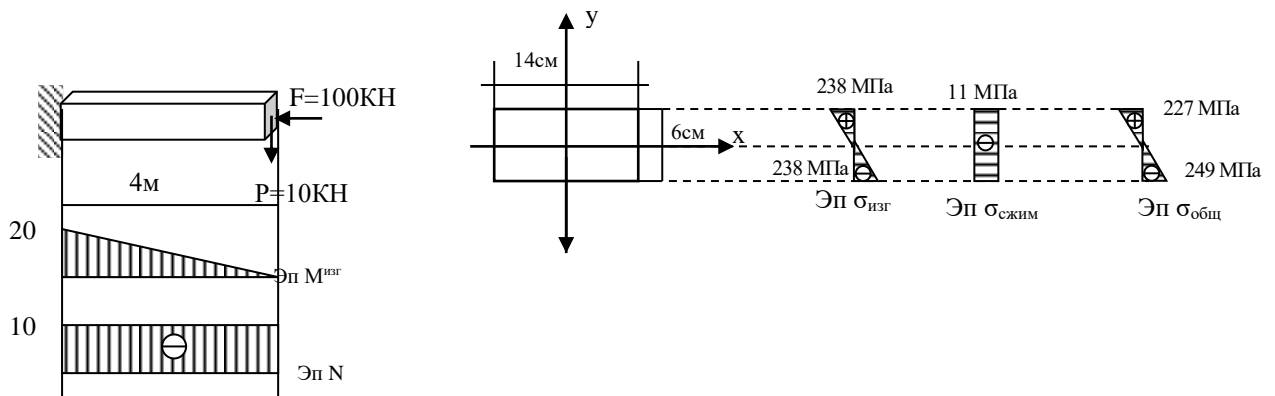
$$\sigma = \pm N/A \pm M_x/I_x \pm M_y/I_y.$$

Для пластичных стержней, одинаково работающих на растяжение и сжатие, если расстояние до наиболее удаленных точек сечения одинаково, то условие прочности при косом изгибе имеет вид

$$\sigma_{\max} = N/A + M_{xy_{\max}}/I_x - M_y x_{\max}/I_y = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y \leq [\sigma]$$

### Пример

Чему равны экстремальные напряжения в опасном сечении прямоугольной балки, если на систему воздействует сжимающая сила  $F=100\text{кН}$ , и изгибающая сила  $P=5\text{кН}$



Построим эпюры  $N$  и  $M_{\text{изг}}$

Определим опасное сечение

Напряжения  $\sigma$  от сжатия равны  $\sigma = N/A = 100\text{кН}/(14 \cdot 6) = 1,1 \text{кН}/\text{см}^2 = 11 \text{МПа}$

Напряжения от изгиба  $\sigma = M_{\text{оп сеч}}/W_x = 2000/84 = 23,8 \text{кН}/\text{см}^2 = 238 \text{МПа}$

$W_x = bh^2/6 = 14 \cdot 6^2/6 = 84 \text{см}^3$

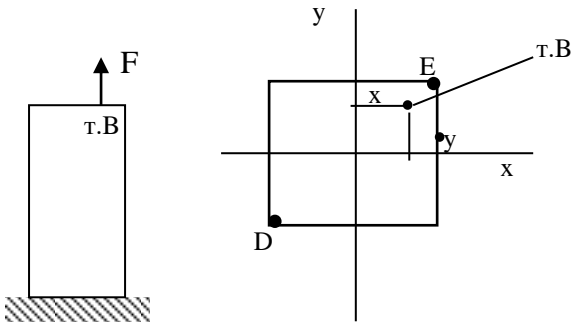
$\sigma = \pm \sigma_{\text{раст}} \pm \sigma_{\text{изг}} = 11 \pm 238$

$\sigma_{\text{макс}} = 227 \text{МПа}$

$\sigma_{\text{мин}} = 249 \text{МПа}$

### Внецентренное растяжение сжатие

Весьма часто продольная нагрузка бывает приложена не в центре тяжести поперечного сечения стержня, а с некоторым смещением (эксцентриситетом) относительно главных осей сечения. Такой случай растяжения – сжатия называют внецентренным а точку приложения силы – полюсом.



В данном случае от воздействия силы  $F$  возникает внутренняя продольная сила  $N$ . А также изгибающие моменты относительно оси  $x$  и оси  $y$  равные

$$M_x = F \cdot y$$

$$M_y = F \cdot x$$

Поэтому напряжение в любой точке поперечного сечения с координатами  $x$  и  $y$  определяется, как при осевом растяжении и изгибе в двух плоскостях

$$\sigma = \pm N/A \pm M_x \cdot y / I_x \pm M_y \cdot x / I_y$$

Если у сечения есть крайне выраженные экстремальные точки, то экстремальные напряжения имеют следующий вид

$$\sigma = \pm N/A \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y$$

Для нашего случая нормальные напряжения в т.Е равны

$$\sigma_E = +N/A \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y$$

нормальные напряжения в т.Д равны

$$\sigma_D = +N/A - M_x / W_x - M_y / W_y$$

Условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии) будет иметь вид

$$\sigma = \pm N/A \pm M_x \cdot y / I_x \pm M_y \cdot x / I_y \leq [\sigma]$$

Так как в сечении могут быть растянутые и сжатые волокна то есть нейтральная ось в которой нет нормальных напряжений

Для нахождения ее приравняем уравнение напряжений к нулю

$$\sigma = \pm N/A \pm M_x \cdot y_0 / I_x \pm M_y \cdot x_0 / I_y = 0$$

$x_0$  и  $y_0$  – текущие координаты точек нулевой линии

так как  $M_x = F \cdot y = N \cdot y$

$$M_y = F \cdot x = N \cdot x$$

Тогда подставив значения моментов в уравнение получим

$$\sigma = +N/A + N \cdot y_0 \cdot y / I_x + N \cdot x_0 \cdot x / I_y = 0$$

Вынесем  $N/A$  за скобки  $\sigma = N/A(1 + Ay_0 \cdot y/I_x + A \cdot x_0 \cdot x/I_y) = 0$

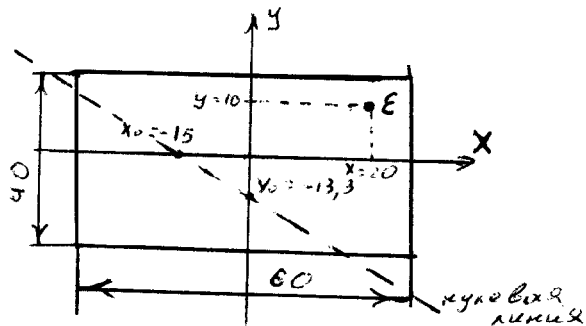
Введем обозначение  $i_x^2 = I_x/A$ ,  $i_y^2 = I_y/A$

$i_x$  и  $i_y$  - радиусы инерции сечения относительно оси  $x$  и  $y$

$$1 + Ay_0 \cdot y/I_x + A \cdot x_0 \cdot x/I_y = 0 \quad \text{уравнение нулевой линии}$$

Так как для нахождения прямой в координатных осях необходимо знать всего две точки, то зная уравнение прямой линии эти точки находят при пересечении координатных осей приравнивая соответственно одну из переменных координат нулевой линии к нулю.

Пример



Найти положение нулевой линии в прямоугольном сечении размером  $40 \times 60$  см, если сжимающее усилие расположено в т.Е.

1) Найдем геометрические характеристики сечения

$$A = 60 \cdot 40 = 2400 \text{ см}^2$$

$$I_{x0} = 60 \cdot 40^3 / 12 = 320000 \text{ см}^4$$

$$I_{y0} = 40 \cdot 60^3 / 12 = 720000 \text{ см}^4$$

2) Найдем точку пересечения с осью  $y$  ( $x=0$ )

$$1 + Ay_0 \cdot y/I_x + A \cdot x_0 \cdot x/I_y = 0$$

$$Ay_0 \cdot y/I_x = -1$$

$$2400 \cdot y_0 \cdot 10 / 320000 = -1$$

$$y_0 = -13,3 \text{ см}$$

2) Найдем точку пересечения с осью  $x$  ( $y=0$ )

$$Ax_0 \cdot x/I_y = -1$$

$$2400 \cdot x_0 \cdot 20 / 720000 = -1$$

$$x_0 = -15 \text{ см}$$

### Ядро сечения

Некоторые материалы (бетон, кирпичная кладка) могут воспринимать лишь весьма незначительные растягивающие напряжения, а другие (например, грунт) не могут вовсе сопротивляться растяжению. Такие материалы используются для изготовления лишь элементов конструкций, в которых не возникают растягивающие напряжения. Поэтому они не применяются для изготовления элементов конструкций, испытывающих изгиб, кручение, центральное и внецентренное растяжение.

В центрально сжатых элементах растягивающие напряжения не возникают, а потому они могут изготавливаться из указанных материалов. Из таких материалов могут изготавливаться и внецентренно сжатые элементы, если в них не возникают растягивающие напряжения. Это происходит в случае, когда точка приложения сжимающей силы расположена внутри некоторой центральной области поперечного сечения, называемой ядром, или на границе этой области.

*Ядром сечения называется центральная область сечения, обладающая тем свойством, что сжимающая сила, приложенная в любой ее точке, вызывает во всех точках поперечного сечения бруса только сжимающие напряжения, т. е. напряжения одного знака.*

Если сила приложена за пределами ядра сечения, то в поперечном сечении возникают и сжимающие, и растягивающие напряжения.

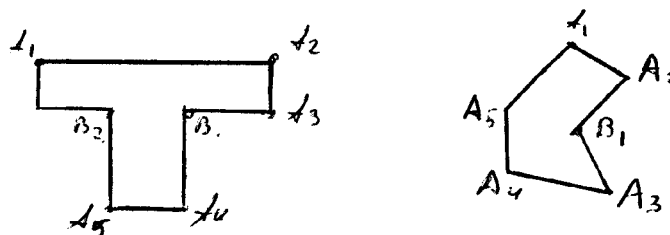
Следовательно если сила приложена в ядре сечения то в сечении напряжения только одного знака, а нулевая линия лежит либо за пределами сечения, либо касается его

При расчете внецентренно сжатых элементов, изготавливаемых материала, плохо воспринимающего растягивающие напряжения, важно знать форму и размеры ядра сечения.

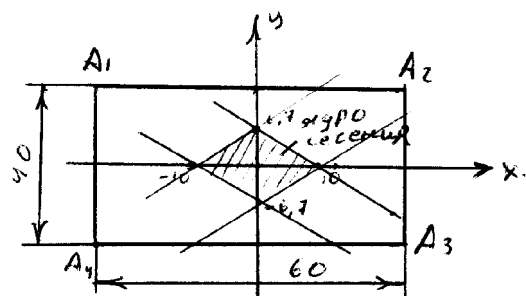
Для определения ядра сечения используют ранее рассмотренное уравнение нулевой линии.

Для этого в рассматриваемом сечении поочередно все вершины принимают за полюс сечения, полученные при этом прямые нулевых линий формируют область ядра сечения.

За полюс принимают только вершины внешних углов многоугольника, вершины внутренних углов многоугольников в расчете не принимаются, см. рис.  $A_1-A_5$  принимают за полюс.  $B_1-B_2$  нет



Пример. Рассчитать положение ядра сечения для прямоугольника 40\*60см



1) Найдем геометрические характеристики

сечения

$$A=60*40=2400\text{см}^2$$

$$I_{x0}=60*40^3/12=320000\text{ см}^4$$

$$I_{y0}=40*60^3/12=720000\text{ см}^4$$

Поставив поочередно полюса во внешние углы прямоугольника найдем нулевые линии, пересечение которых обозначит ядро сечения.



Уравнение нулевой линии

$$1 + Ay_0 \cdot y / I_x + A \cdot x_0 \cdot x / I_y = 0$$

Полюс в т. А<sub>1</sub>

Найдем точку пересечения с осью y (x=0)

$$Ay_0 \cdot y / I_x = -1$$

$$2400 \cdot y_0 \cdot 20 / 320000 = -1$$

$$y_0 = -6,7 \text{ см}$$

Найдем точку пересечения с осью x (y=0)

$$Ax_0 \cdot x / I_y = -1$$

$$2400 \cdot x_0 \cdot (-30) / 720000 = -1$$

$$x_0 = 10 \text{ см}$$

Прямая нулевой линии задается координатами точек (0; -6.7); (10; 0)

Полюс в т. А<sub>2</sub>

Найдем точку пересечения с осью y (x=0)

$$2400 \cdot y_0 \cdot 20 / 320000 = -1$$

$$y_0 = -6,7 \text{ см}$$

Найдем точку пересечения с осью x (y=0)

$$Ax_0 \cdot x / I_y = -1$$

$$2400 \cdot x_0 \cdot 30 / 720000 = -1$$

$$x_0 = -10 \text{ см}$$

Прямая нулевой линии задается координатами точек (0; -6.7); (-10; 0)

Полюс в т. А<sub>3</sub>

Аналогично получаем

Прямая нулевой линии задается координатами точек (0; 6.7); (-10; 0)

Полюс в т. А<sub>4</sub>

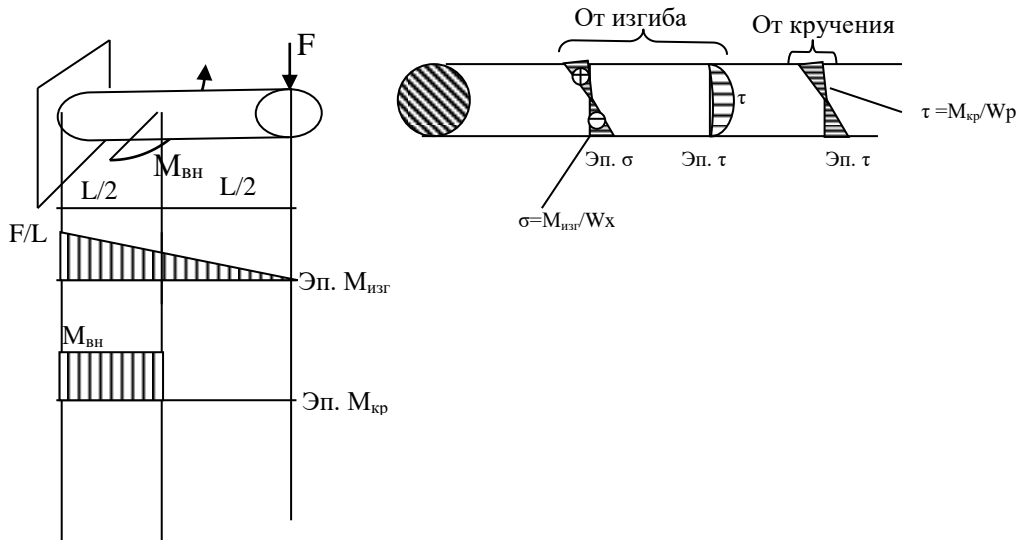
Прямая нулевой линии задается координатами точек (0; 6.7); (10; 0)

Полученные прямые формируют зону ядра сечения.

## Кручение с изгибом

В машиностроительных конструкциях детали, работающие на кручение и изгиб, встречаются очень часто. Характерным примером таких деталей являются валы различных машин.

Дан стальной брус на который действует поперечная нагрузка  $F$  и внешний крутящий момент рис.



В результате в брус возникают нормальные напряжения от изгиба и касательные от кручения и изгиба (рис)

Для круглых сечений касательные напряжения от изгиба незначительны и ими можно пренебречь.

От кручения касательные напряжения равны  $\tau = M_{кр}/W_p$

От изгиба нормальные напряжения  $\sigma = M_{изг}/W_x$

В данном случае опасное сечение у заделки балки

Проверим прочность сечения по одной из гипотез прочности

Так как материал сталь используем 3 или 4 теории прочности

При этом суммарное напряжения равно

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

следовательно

$$\sigma = \frac{\sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Следовательно

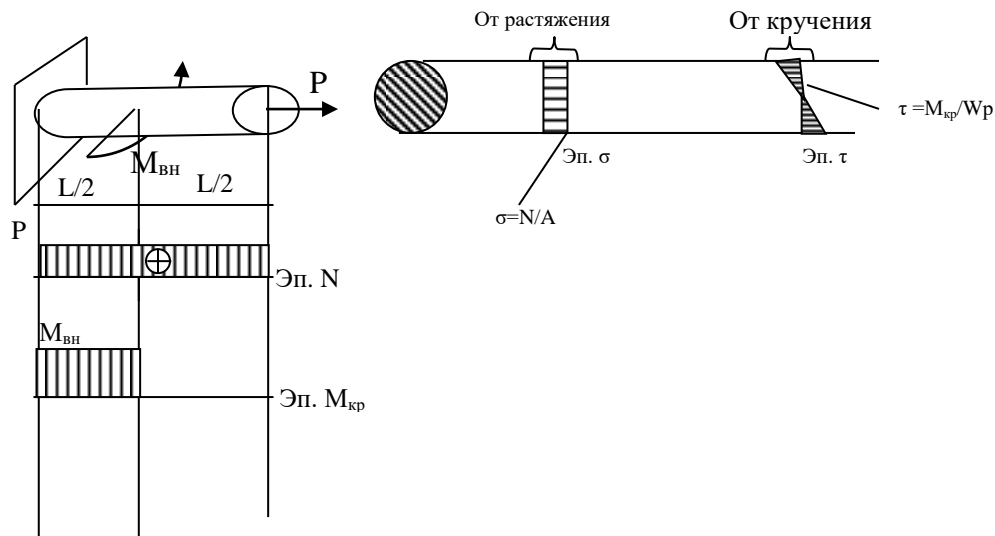
$$W_x = \frac{\sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}}{[\sigma]} \leq [\sigma]$$

Если вал испытывает кривой изгиб то

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

### Кручение с растяжением (сжатием)

В этом случае в поперечных сечениях стержня возникают одновременно два внутренних усилия: крутящий момент и продольная сила (растягивающая или сжимающая).



Для стержня круглого сечения наибольшие касательные напряжения при кручении имеют место в точках контура сечения  $\tau = M_{кр}/W_p$

. При растяжении во всех точках поперечного сечения возникают нормальные напряжения  $\sigma = N/A$ .

Теперь, так же как и в случае кручения с изгибом, следует применить соответствующую гипотезу прочности. В результате получим

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]$$

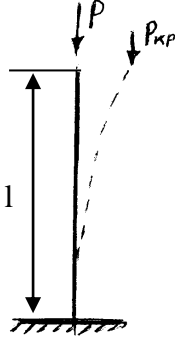
Для случая одновременного сочетания изгиба, кручения и растяжения (сжатия) аналогичным путем получим расчетную формулу в следующем виде:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M_{изг}}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]$$

## Устойчивость сжатых стержней

### Формула Эйлера

Рассмотрим стержень центрально сжатый усилием  $P$ . При определенном значении усилия происходит изгиб стержня. Минимальное значение усилия при котором теряется равновесие называют критической силой  $P_{кр}$ .



Данное усилие рассчитывается по следующей формуле Эйлера.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_{пр}^2};$$

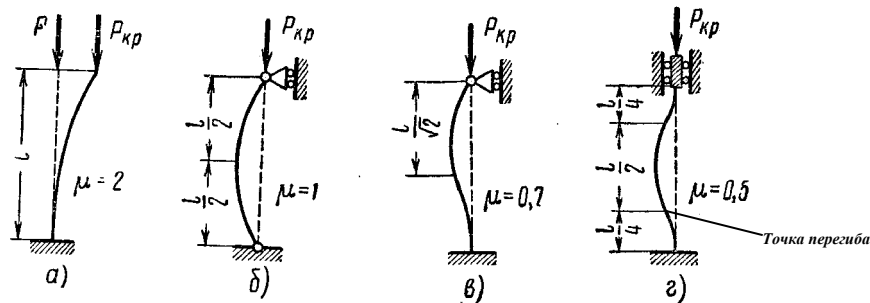
$$l_{пр} = \mu l$$

Где  $I_{\min}$  - минимальный момент инерции стержня

$l_{пр}$  – приведенная длина стержня

$\mu$  – коэффициент длины стержня зависит от закрепления и способа нагружения стержня.

Значение  $\mu$  для различных способов закрепления представим на рис.



Напряжения, возникающие при приложении критической силы находятся по следующей формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{l_{пр}}{i} = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\left(\frac{I_{\min}}{A}\right)}$$

$\lambda$  – гибкость стержня, величина характеризующая способность стержня к продольному изгибу.

## Пределы применения формулы Эйлера Формула Тетмайера-Ясинского

Так как критическое напряжение не должно превышать пределы пропорциональности материала  $\sigma_{пц}$ , то величину гибкости  $\lambda$  при которой возможно использование формул Эйлера определяют по следующей формуле

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} = \lambda_{пред}$$

Предельные значения гибкости можно определить по следующей таблице

*Предельные значения гибкости  $\lambda_{пред}$  различных материалов*

Материал	Предельные значения гибкости $\lambda_{пред}$
Сосна	60
Сталь Ст3	100
Ст5,Ст30	90
15ХСНД/НЛ2/	100
Авиасталь АВТ1	55
Дюралюминий Д16Т	50
Чугун	80

Если условие  $\lambda < \lambda_{пред}$  не выполняется то критические напряжения считают по экспериментальной формуле Ясинского - Тетмайера

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$$

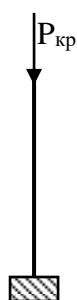
При этом критическую силу находят как

$$P_{кр} = \sigma_{кр} A$$

Таблица коэффициентов Гетмайера-Ясинского

Материал	a, МПа	b, МПа	c, МПа
сосна	40	0,203	-
Ст3	310	1,14	-
Ст5-Ст30	464	3,26	-
Дюраллюмин	380	2,19	-
Чугун	776	12	0,053

## Пример



Дан прямоугольный стальной стержень Ст3 30\*10 мм закрепленный консольно и сжимаемый усилием P. Определить критическую силу и критические напряжения при длине стержня 1 м и 0,1 м

Рассчитаем при  $l=1\text{ м}$

Найдем минимальный момент инерции

$$I_{\min} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3 \cdot 1^3}{12} = 0,25 \text{ см}^4$$

Найдем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}} = \frac{2 \cdot 100}{0,25 / (1 \cdot 3)} = 692 \geq 100 = \lambda_{\text{пред}}^{\text{ст3}}$$

Тк  $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$  – расчет производим по формуле Эйлера

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{692^2} = 4,1 \text{ МПа}$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,25}{(2 \cdot 100)^2} = 1,23 \text{ кН}$$

Рассчитаем при  $l=0,1\text{ м}$

$$\lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}} = \frac{2 \cdot 10}{0,25 / (1 \cdot 3)} = 69,2 \leq 100 = \lambda_{\text{пред}}^{\text{ст3}}$$

Тк  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$  – расчет производим по формуле Гетмайера-Ясинского

$$\sigma_{\text{кр}} = 310 - 1,14 \cdot 69,2 = 231,1 \text{ МПа}$$

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 23,11 \cdot 3 = 69,3 \text{ кН}$$

### Условие устойчивости сжатых стержней

Стержни работающие на сжатие кроме проверки прочности обязательно должны проходить проверку на устойчивость. При этом условие устойчивости выглядит следующим образом:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma_y]$$

Допускаемое напряжение на устойчивость рассчитывается как

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{K_y}$$

Где  $K_y$  – коэффициент запаса устойчивости(принимается для стали 1,8-3, 5-5,5 для чугуна, 2,8-3,2 для дерева)

Для расчета устойчивости вводят понятие коэффициента продольного изгиба  $\varphi$

При этом

$$\varphi = \frac{[\sigma_y]}{[\sigma_{сж}]}$$

Зависимость  $\varphi$  от  $\lambda$  дают в виде кривых либо в виде таблиц.

Таблица зависимостей  $\varphi$  от  $\lambda$

Материал	Коэффициент продольного изгиба $\varphi \cdot 10^3$														
	При гибкости $\lambda$														
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
АМг	973	945	917	870	770	685	603	530	465	415	365	327	296	265	235
Амг6	973	946	890	770	640	542	458	387	322	280	243	213	183	162	148
АВТ1	996	992	900	780	660	557	463	387	312	252	210	175	150	129	113
Д16Т	999	998	835	700	568	455	353	269	212	172	142	119	101	87	76
Ст2,3, 4	990	970	950	920	890	860	810	750	690	600	520	450	400	360	320
Ст5	980	950	930	900	840	800	740	660	590	500	430	380	320	280	270
НЛ-2 15ХСНД	980	950	930	900	830	780	710	630	540	450	390	330	290	260	230
СЧ12,15 СЧ18,21	970	910	810	690	570	440	340	260	200	160					
СЧ24, СЧ28	950	870	750	600	430	320	230	180	140	120					
Сосна	990	970	930	870	800	710	610	490	380	310	250	220	180	160	140

При использовании данной таблицы проводят расчет на устойчивость по формуле.

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi [\sigma_{сж}]$$

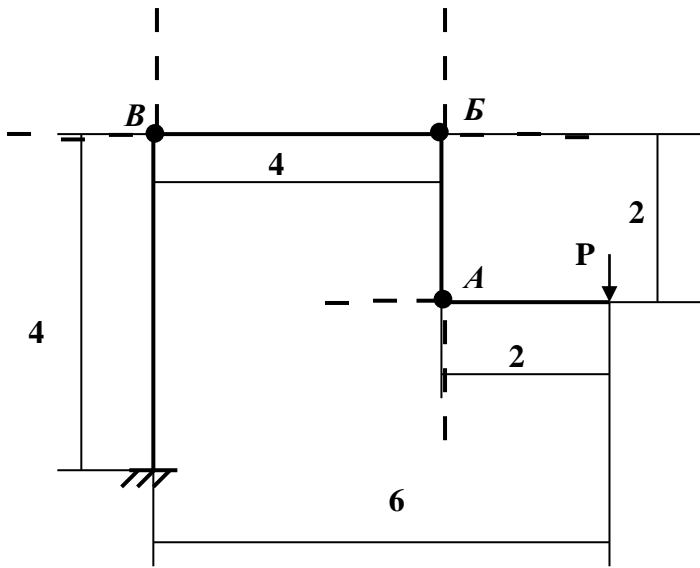


**Продольно-поперечный изгиб**

## Лекция 9

## Определение моментов сил в рамах

а) Определение плеча при нахождении моментов сил.



Момент силы возможно найти относительно любой точки.

Рассмотрим следующую раму.

Определим моменты в т. А, Б, В

т. А. Нарисуем пунктиром в данной точке крест.

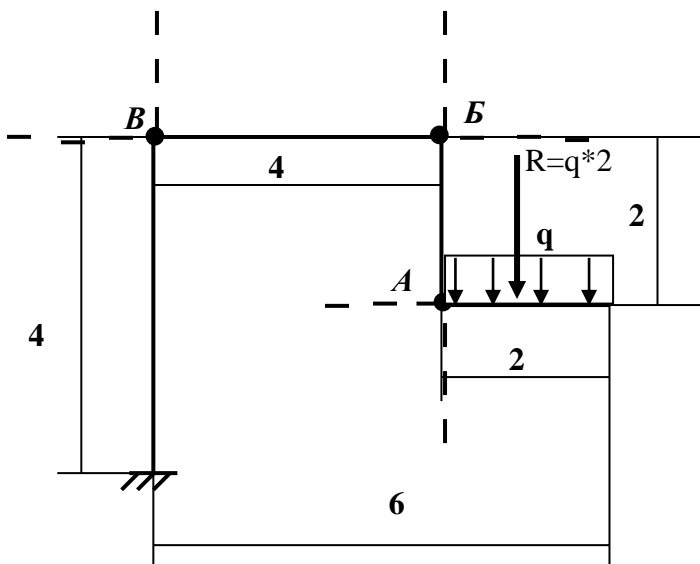
Плечом момента от силы Р относительно точки А будет считаться отрезок от точки до пересечения равнодействующей силы с пунктиром.

$$M_A = P \cdot 2$$

Момент относительно точки Б  $M_B = P \cdot 2$

Момент относительно точки В  $M_B = P \cdot 6$

Найдем моменты от распределенной нагрузки q. Равнодействующая от распределенной нагрузки находится в центре.



Следовательно момент распределенной нагрузки, относительно т.А будет иметь вид  $M_A = R \cdot 2 = q \cdot 2 \cdot 1$

Момент относительно точки Б  $M_B = P \cdot 2$

Момент относительно точки В  $M_B = P \cdot 6$

Б) Построение эпюр Q, M, и N на выделенном участке рамы.

Для упрощения построения эпюр внутренних силовых факторов для рамы, удобно рассматривать каждый отдельный участок

Пример:

Дана рама следующего вида

Разбить раму на участки, и вывести уравнения распределения внутренних силовых факторов, на участках АВ и ВБ

1) Разбить раму на участки.

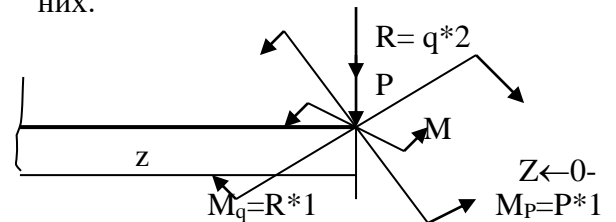
Рама разбивается на участки по месту действия сил и соединений стержней.

Следовательно, данная рама разбивается на 6 частей.

Так как у рамы одна опора, то рассматриваем раму со свободного конца и реакции опоры не ищем.

2) Рассмотрим II участок ВБ. Разрезаем его и рассматриваем с права на лево (рис).

3) Рисуем отдельно этот участок и переносим в т.Б все видимые равнодействующие силы и моменты от них.



4

Найдем поперечную силу Q

$$Q = P + R - \text{const}$$

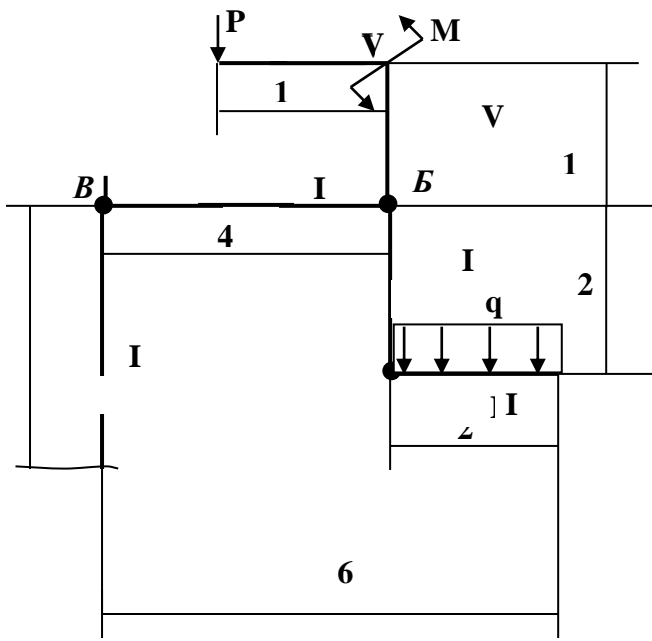
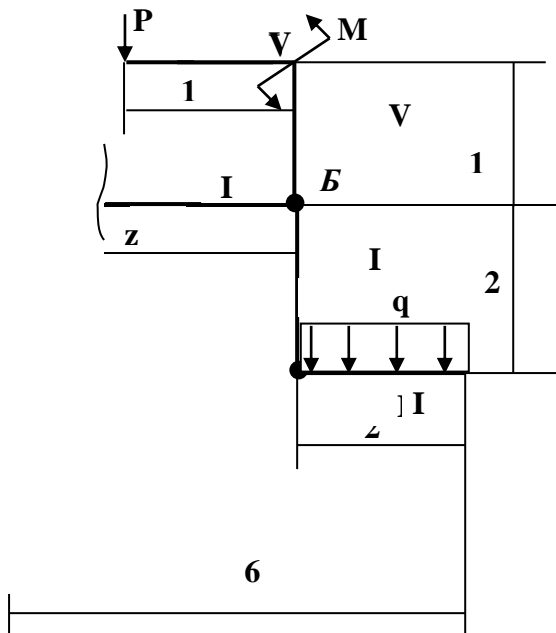
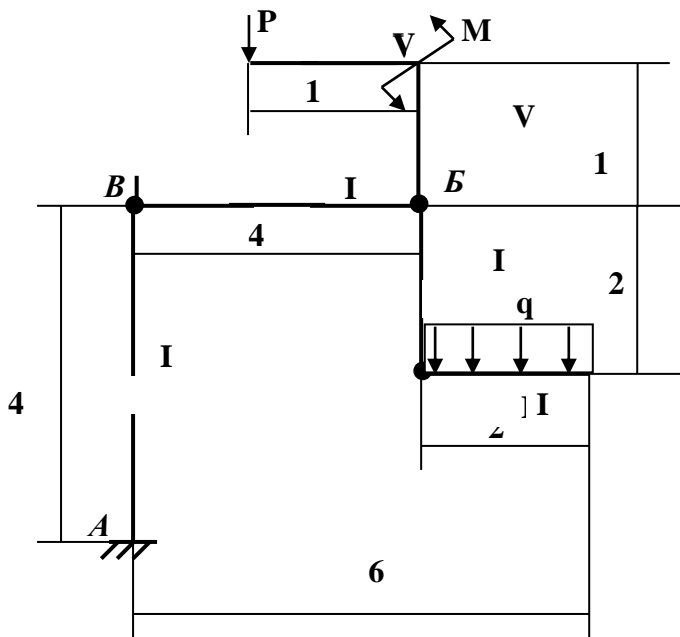
Найдем изгибающий момент

$$M = -RZ - PZ + M - M_p - M_q$$

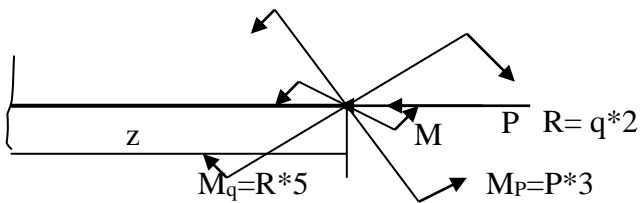
Найдем продольную силу N

$$N = 0$$

4) Рассмотрим I участок. Разрезаем его и рассматриваем с верху в низ (рис).



Выносим отдельно этот участок и переносим в т.В все видимые равнодействующие силы и моменты от них.



Найдем поперечную силу Q

$$Q = 0 - \text{const}$$

Найдем изгибающий момент

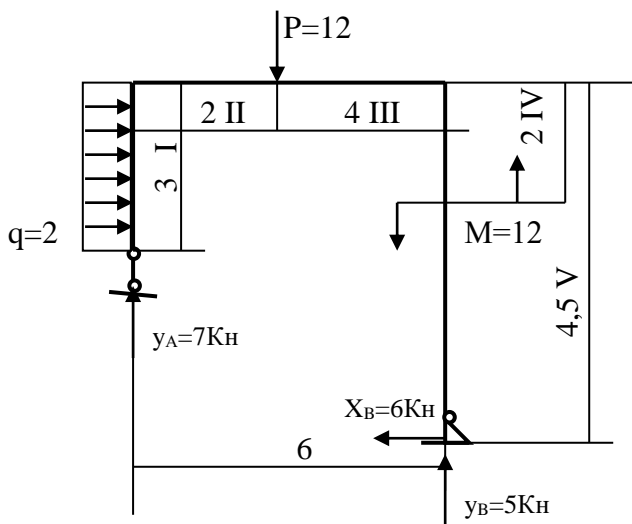
$$M = M - M_P - M_q$$

Найдем продольную силу N

$$N = -P - R - \text{const}$$

### Рамы Аналитический способ построения эпюр.

Дана П – образная рама на шарнирной и шарнирно-неподвижной опоре. С приложенными активными нагрузками  $P = 12 \text{ кН}$ ,  $q = 2 \text{ кН/м}$  и сосредоточенной парой сил  $M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .



Построить эпюры внутренних усилий: Q, M, N.

1 Рассчитаем реакции опор

$$\sum X = 0 \Rightarrow q \cdot 2 - X_B = 0$$

$$X_B = 6$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow X_B \cdot 1,5 - M - Y_B \cdot 6 + P \cdot 2 + q \cdot 3 \cdot 1,5$$

$$Y_B \cdot 6 = 9 - 12 + 24 + 9 = 30$$

$$Y_B = 5 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M + Y_A \cdot 6 - P \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 3 = 0$$

$$Y_A \cdot 6 = 12 + 12 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 42 \text{ кН}$$

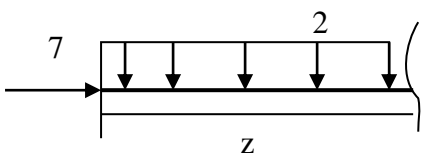
### Проверка

$$\sum Y = 0$$

$$7 + 5 - 12 = 0!!$$

### Рассмотрим участок I

$$z \uparrow 0-3$$



$$Q = -q \cdot z = -2z \quad z=0 \quad Q=0$$

$$z=3 \quad Q=-6$$

$$M = -qz^2/2 = -Z^2$$

$$Z=0 \quad M=0$$

$$Z=3 \quad M=-9$$

$$N = -y_a = -7 - \text{const}$$

**Второй участок**

II  $z \rightarrow 0-2$

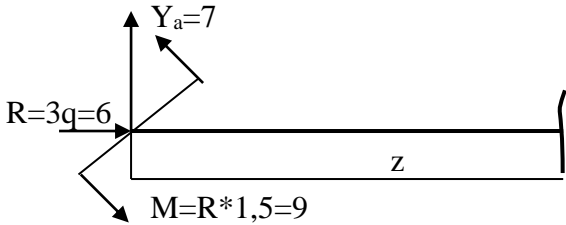
$$Q = Y_a = 7 - \text{const}$$

$$Z=0 \quad M=-9$$

$$Z=2 \quad M=5$$

$$M = y_a z - M = 7z - 9$$

$$N = -R = -6 - \text{const}$$



**Третий участок**

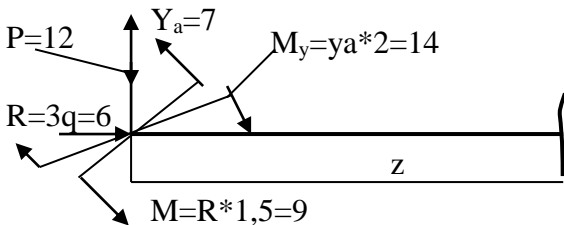
III  $z \rightarrow 0-4$

$$Q = Y_a - P = -5 - \text{const}$$

$$M = y_a z - Pz + M_y - M = -5z + 5$$

$$Z=0 \quad Q=5$$

$$Z=4 \quad Q=-15$$



$$N = -R = -6 - \text{const}$$

**Четвертый участок**

IV  $z \uparrow 0-2$

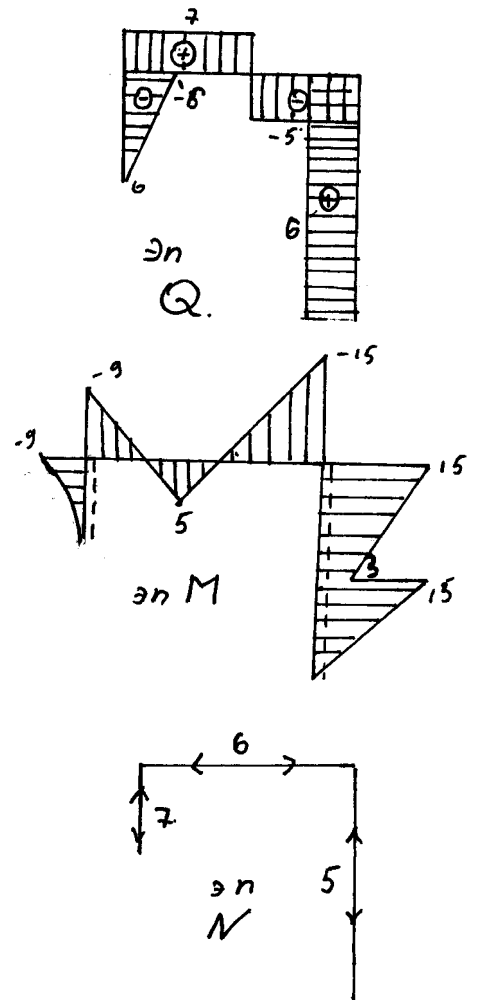
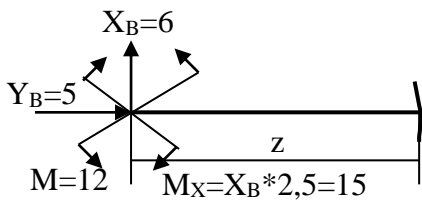
$$Q = X_B = 6 - \text{const}$$

$$M = x_B z - M + M_x = 6z + 3$$

$$Z=0 \quad M=3$$

$$Z=4 \quad M=15$$

$$N = -y_B = -5 - \text{const}$$



**Пятый участок**

V  $z \uparrow 0-2,5$

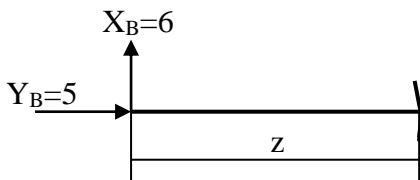
$$Q = X_B = 6 - \text{const}$$

$$M = x_B z = 6z$$

$$Z=0 \quad M=0$$

$$Z=2,5 \quad M=15$$

$$N = -y_B = -5 - \text{const}$$



Построим эпюры Q, M, N

## Лекция Расчет статически неопределимых рам

### Основные понятия

Статически неопределимые рамы – такие системы расчет которых при помощи одних уравнений статики невозможен, так как количество неизвестных в данных уравнениях больше числа самих уравнений. Для расчета таких систем составляются дополнительные уравнения связывающие деформации отдельных элементов системы.

Существует несколько методов расчета рам:

#### 1 Точные

а) *Основные* – метод сил, метод перемещений

В методе сил неизвестными являются силы

В методе перемещений неизвестными являются перемещения

б) *Второстепенные* - основаны на точных методах расчета - комбинированный, смешанный метод

#### 2 Приближенные

Метод последовательных перемещений, метод Кросса и т.д.

#### 3 Глазомерный

### Метод сил

Для расчета рам данным методом необходимо выполнить кинематический анализ системы, т.е. выявить число дополнительных уравнений для обеспечения решения системы.

Число этих уравнений определяется так называемым числом “Лишних связей”, которые можно найти по формуле “Чебышева” либо формуле “Бернштейна”

#### Формула Чебышева

$$L = C_{оп} + 2Ш - 3Д$$

где  $C_{оп}$  – число опорных связей способных дать рассматриваемая система;

Ш – число простых шарниров, простым называется шарнир соединяющий не более 2 элементов, иначе шарнир называется сложным

Сложный шарнир эквивалентен  $N-1$  простых шарниров, где  $N$  – число простых дисков соединяемых сложным шарниром.

$D$  – число дисков, для определения числа дисков необходимо убрать все опоры и шарниры, число частей на которые распадется является числом дисков.

#### Замечание к формуле Чебышева

Если к опорному шарниру подходит один диск, то этот шарнир в формуле не учитывается

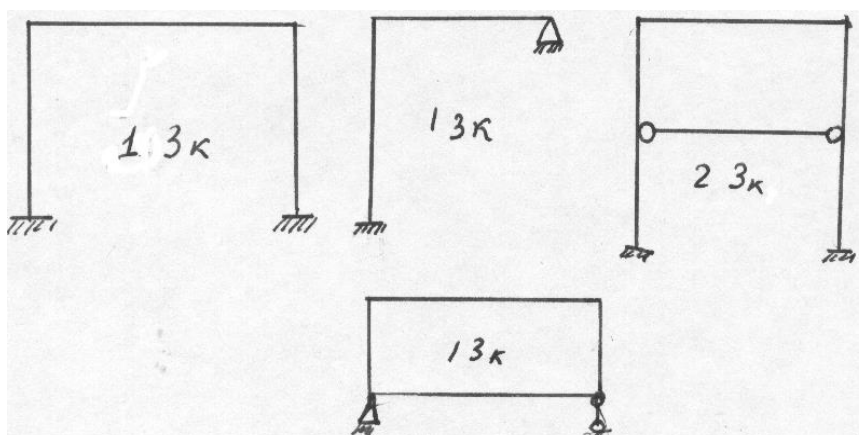
#### Формула Бернштейна

$$L = 3Z_k - Ш - П_о$$

где  $Z_k$  – число замкнутых контуров

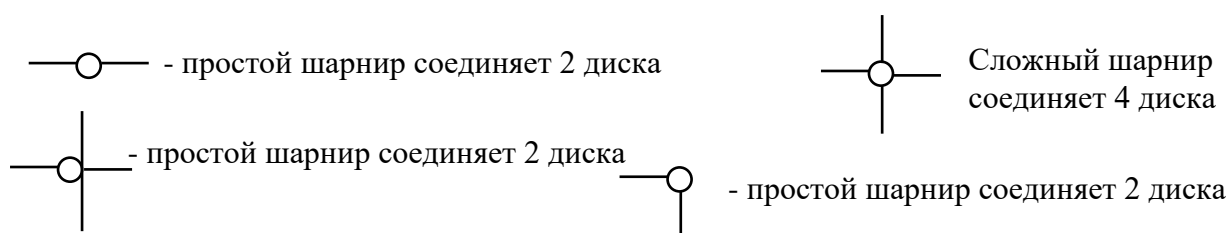
$П_о$  – число подвижных опор или скользящих заземлений.

Замечание по формуле Чебышева по формуле Бернштейна не действует

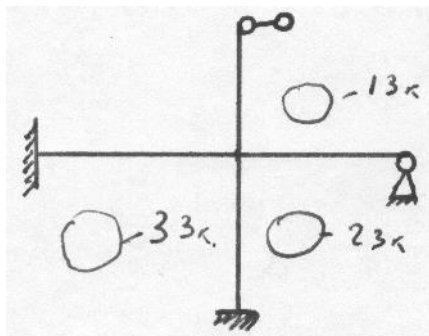


Число замкнутых контуров

#### Виды шарниров



Пример. Рассчитать число лишних связей в статически неопределимой плоской



раме

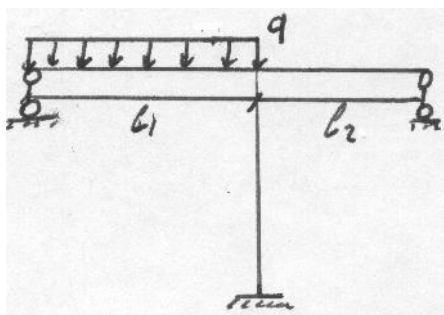
Так как число лишних связей 6 то в данном случае необходимо построение 6 дополнительных уравнений.

### Порядок расчета рам методом сил

1 Определим число лишних связей

$$L = C_{on} + 2Ш - 3Д = 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 2$$

$$L = 33к - Ш - По = 3 \cdot 2 - 2 - 2 = 5$$



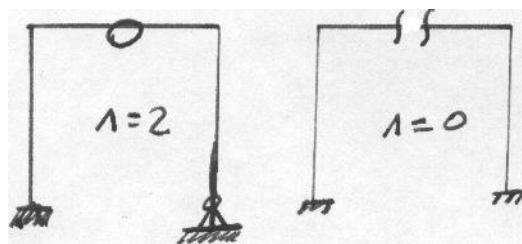
2. Выбираем для расчета основную систему

Для этого в заданной системе устраняем

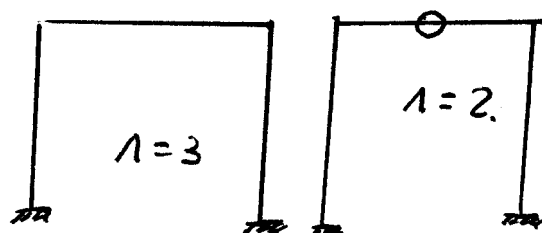
лишние связи, при этом основная система должна быть статически определима

### Способы устранения лишних связей

1) Устранение одного опорного стержня снимает 1 связь



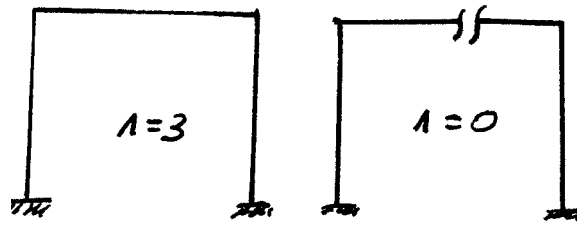
2) Разрез рамы по шарниру снимает 2 связи



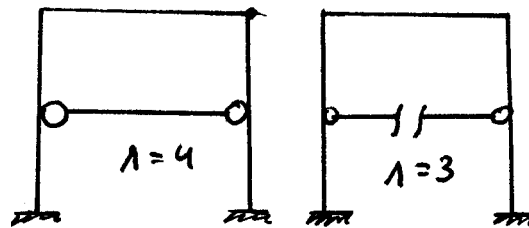
3) Введение шарнира в элемент работающий на изгиб снимает 1 связь



4) Разрез элемента работающего на изгиб снимает 3 связи

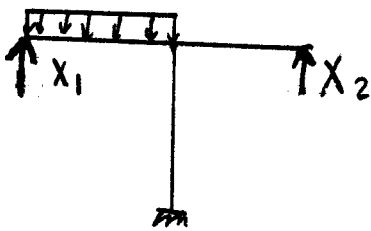


5) Разрез стержня имеющего по концам шарниры устраниет 1 связь



3. Изображаем эквивалентную систему т.е систему равнозначную заданной

Для получения эквивалентной системы необходимо загрузить основную



систему с заданной нагрузкой силами, действующими в отброшенных связях, и записать уравнения совместности деформаций

4. Составляем канонические уравнения

Как и в более простых случаях решения статически

неопределимых задач составляются уравнения перемещений от сил  $X_1$  и  $X_2$ . Однако в реальной системе перемещение в данных точках не возможно следовательно  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  равно 0

Где  $\Delta_1, \Delta_2$ . - перемещение по направлению единичных сил  $X_1$  и  $X_2$

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_1 p = 0 \text{ т.к. } \Delta_1 = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_2 p = 0 \text{ т.к. } \Delta_2 = 0$$

$\delta_{11}$  ( $\delta_{ii}$ ) – перемещение по оси действия силы  $X_1$  от силы  $X_1$

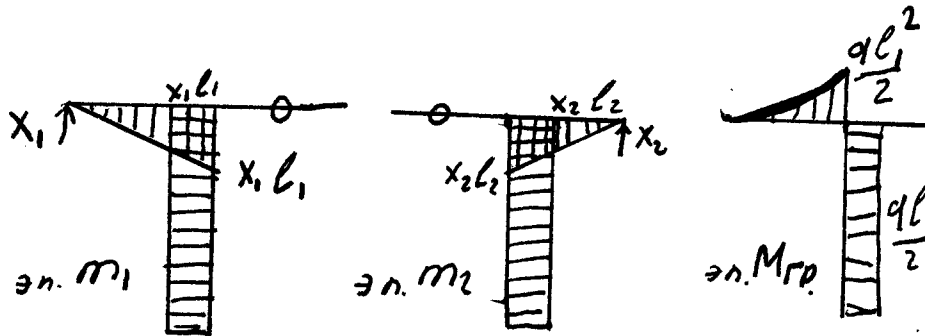
$\delta_{12}$  ( $\delta_{ik}$ ) – перемещение по оси действия силы  $X_1$  от силы  $X_2$

$\Delta_1 p$  - перемещение по оси действия силы  $X_1$  от внешних сил.

### Лекция

5. Определяем коэффициенты и свободные члены уравнений.

Для этого в основной системе построим эпюры моментов от единичных нагрузок  $X_1$ ,  $X_2$ , и грузовую эпюру  $M_p$ .



Перемножив полученные эпюры по методу Максвелла – Мора или Верещагина, найдем главные, побочные коэффициенты, а так же свободные члены уравнения.

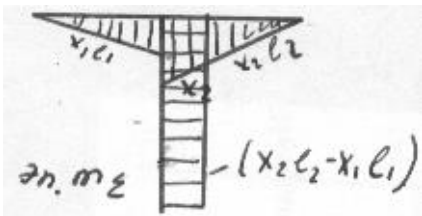
$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{m_i m_i}{EI} dz \text{ - Главные коэффициенты}$$

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \sum \int \frac{m_i m_k}{EI} dz \text{ - Побочные коэффициенты}$$

$$\Delta ip = \sum \int \frac{m_i M_p}{EI} dz \text{ - свободные члены}$$

6. Проверим правильность найденных коэффициентов

а) Проверка коэффициентов



$$\Sigma(\delta_{ii} + \delta_{ki}) = \sum \int \frac{m_\Sigma m_\Sigma}{EI} dz$$

б) Проверка свободных членов

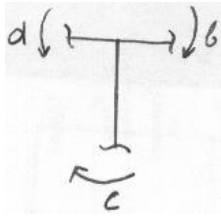
$$\Sigma \Delta ip = \sum \int \frac{m_\Sigma M_p}{EI} dz$$

7. Подставим найденные коэффициенты в канонические уравнения и решим полученную систему.

---

8. Проверим правильность решения путем подстановки полученных значений  $X$  в первоначальные уравнения.

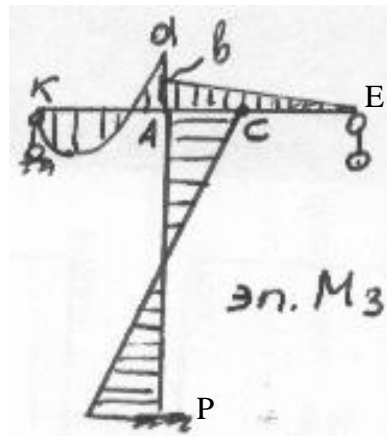
Если в процессе решения значения  $X$  отрицательны, то неправильно выбрано направление единичных нагрузок.



В основной системе строим “исправленные эпюры”  $M_i$  умножением ординат эпюр  $m_i$  на полученные значения  $X_i$

9. Построим эпюру моментов в заданной раме  $M_3$

Для этого складываем  $M_i$  с  $M_p$



10. Проверим эпюру  $M_3$

а) Статическая проверка – по вращательному равновесию узлов

Вырезаем центральный узел А

$$\sum M_A = 0$$

б) Кинематическая проверка

$$\sum \int \frac{m_z M_3}{EI} dz = 0 (\pm 2\%)$$

11 Строим эпюру поперечных сил в заданной раме

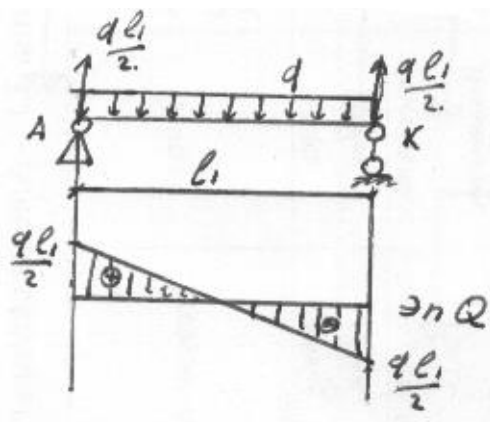
Для этого используем эпюру  $M_3$ , и следующую формулу

$$Q_x = Q_x^p + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{L}$$

$Q_x$  – поперечная сила в любом сечении участка

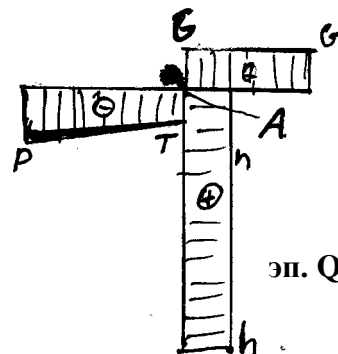
$Q_x^p$  – поперечная сила в рассматриваемом стержне при построении отдельно от заданной рамы

$M_{\text{прав}}, M_{\text{лев}}$  – Значение моментов в правом или левом конце рассматриваемого участка заданной эпюры



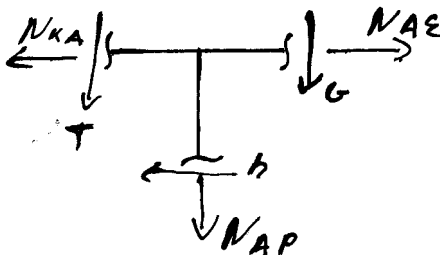
$$Q_{ak} = \frac{ql_1}{2} + \frac{-a-0}{l_1}$$

$$Q_{ak} = -\frac{ql_1}{2} + \frac{-a-0}{l_1}$$



12. Строим эпюру  $N$ , используя метод вырезания узлов и эпюру  $Q$

Для этого вырезаем узел, проставляем направление силы  $N$  в каждом стержне и используя эпюру  $Q$  проставляем направление сил с данной эпюры



При этом если на эпюре  $Q$  значение положительно то направление в узле по часовой стрелке.

Спроецировав все силы на ось  $Y$  и  $X$  получим

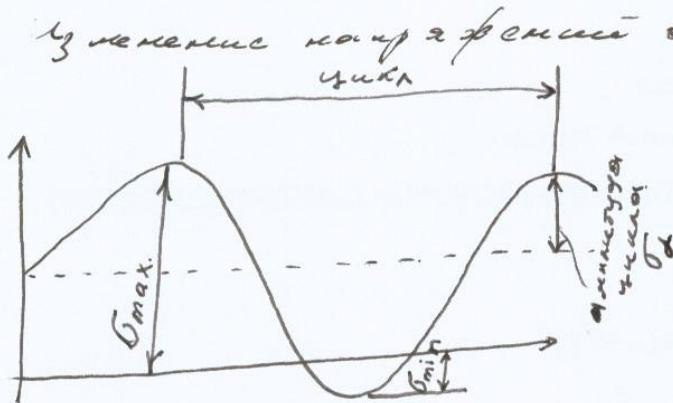
значение поперечной силы  $N$



## Усталость.

①

Достаточно часто детали работают с периодически изменяющимися во времени нагрузками, следовательно в ней происходят циклические изменения напряжений



Как показывает практика вид кривой не имеет значения, прочностные материалы зависят от величины максимума и минимума

ных напряжений  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ .

Совокупность всех последовательных <sup>переменных</sup> значений <sup>напряжения</sup> за один <sup>цикл</sup> период процесса называют циклом напряжений

Наибольшее напряжение цикла называют <sup>максимальное</sup>  $\sigma_{max}$  и наименьшее - <sup>минимальное</sup>  $\sigma_{min}$

Арифметическая полу сумма <sup>макс и мин</sup> напряжений называют средним напряжением (или статическое составляющей)  $\sigma_m$ .

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \text{ - среднее напряжение.}$$

$\sigma_m$  бывает положительным и отрицательным.

Алгебраическая погрязность ~~цикла~~ максимална в макс  
и минимална в мин погрязности называется  
амплитудой  $\sigma_a$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad \text{— амплитуда, цикл.}$$

Амплитуда бывает только положительной.  
Сколько амплитуд и среднего напряжения  
выражают  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$ , как

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \sigma_m + \sigma_a \\ \sigma_{min} &= \sigma_m - \sigma_a \end{aligned}$$

Если  $\sigma_{max} = \sigma_{min}$ , то цикл называется симметричным  
при этом  $\sigma_m = 0$ .

Если  $\sigma_{max} \neq \sigma_{min}$ , — цикл называется асимметричным.

Асимметричный цикл может быть знакопеременным  
и знакопостоянным.

Если  $\sigma_{min}$  или  $\sigma_{max} = 0$  цикл называется отнулевым  
или нульсигурным.

Отношение  $\sigma_{min}$  к  $\sigma_{max}$  называется коэффициентом  
асимметрии, цикла

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad \text{— коэффициент асимметрии.}$$

Характеристика цикла отнесением амплитуды  
к среднему напряжению

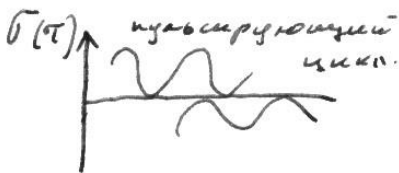
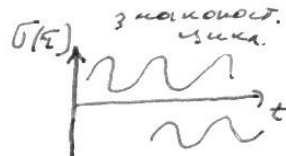
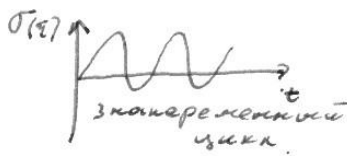
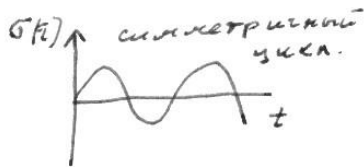
$$P = \sigma_a / \sigma_m \quad \text{— характеристика цикла.}$$

③

$$p = \frac{1-R}{1+R}$$

Для симметричного цикла  $R = -1$   $p = \pm \infty$

Для пульсирующего цикла.  $R = 0$   $p = 1$  или  $\sigma_{\text{положит.}}$   
 $R = 0$   $p = -1$  для  $\sigma_{\text{отрицат.}}$



$\sigma_{\text{max}}$ ,  $\sigma_{\text{min}}$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$ ,  $R$  —  
 — параметры цикла.

Каждый цикл определяется любыми 2-мя параметрами, остальные находят по формулам.

При действии переменных напряжений разрушение материала происходит при макс.  $\sigma_{\text{max}}$  и  $\sigma_{\text{min}}$  значительно меньше  $\sigma_B$ .

Это связано с тем, что при циклических напряжениях происходит образование, накопление и развитие микротрещин. Это значительно снижает прочность материала — это явление называется усталостью.

Усталостное разрушение всегда происходит внезапно. (не важно крутящий момент или нагрузка)



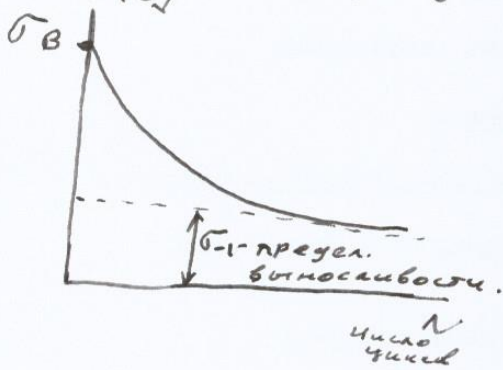
### Предел выносливости.

Выносливость - способность материала выдерживать многократное действие переменных напряжений

Для установления предельного числа циклов материала. производят испытания на изгиб

при  $\sigma_{max} = \sigma_{min}$ . вплоть до их разрушения постепенно уменьшая амплитуду (число циклов

до разрушения увеличивается) Это результаты строят кривую усталости (кривую Вёлера)



Кривая усталости показывает, что с увеличением числа циклов уменьшается  $\sigma_B$  материала.

У малых и средних периодов частот, а так же некоторых меньших частотных степеней. Кривая выходит вправо параллельно оси абсцисс. Т.е. надежность прочно прекращается.

Эта прямая называется пределом выносливости, а на графике соответствует ее пределу выносливости обозначают  $\sigma_{-1}$

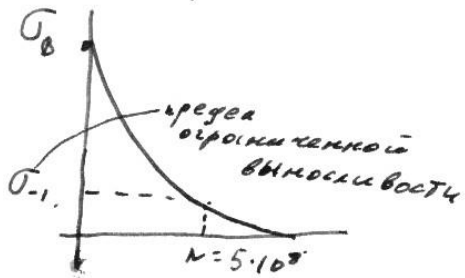
Для чугуна и сталей число циклов которое выдержит материал соответствует  $k=10^7$

Для углеродистой стали  $\sigma_{-1} = 0,43 \sigma_B$ .

Для цветных материалов линия Вейера не имеет горизонтальной касательной.

(5)

Цветные мат-лы



Для цветных материалов испытывают концы - предел ограниченной выносливости.

Предел ограниченной выносливости устанавливается для расчета большого числа циклов  $5 \cdot 10^8$

Предел выносливости при центральном

растяжении с фатиги обозначают  $\sigma_{-1P}$

$$\sigma_{-1P} = 0,7 \div 0,9 \sigma_{-1}$$

Предел выносливости по касательным напряжениям

$$\tau_{-1} = 0,58 \sigma_{-1}$$



Деформация	Условие прочности	Рациональные размеры	Грузоподъемность	Перемещение	Напряжения по высоте сечения	Максимальные напряжения	Эпюры распределения напряжений по высоте сечения
<i>Растяжение-сжатие</i>	$\sigma = \frac{N_{on}}{A} \leq [\sigma]$	$A = \frac{N_{on}}{[\sigma]}$	$N_{on} = [\sigma]A$	$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$	$\sigma = \frac{N}{A}$	$\sigma = \frac{N}{A}$	
<i>Кручение</i>	$\tau = \frac{M_{кр}^{on} R}{I_p} \leq [\tau]$ $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ или $\tau = \frac{M_{кр}^{un}}{W_p} \leq [\tau]$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$	$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{on}}{\pi[\tau]}}$	$M_{кр}^{on} = [\tau]W_p$	$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p}, \quad \gamma = \frac{M_{кр}}{GI_p}$	$\tau_e = \frac{M_{кр} \rho_e}{I_p}$	$\tau_{max} = \frac{M_{кр}^{on} R}{I_p}$	
<i>Изгиб</i>	$\sigma = \frac{M_{изг}^{on}}{W_x} \leq [\sigma]$ Для прямоугольника $W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$ Для круга $W_x = \frac{\pi d^3}{32}, \quad I_x = \frac{\pi d^4}{64}$ Для кольца $W_x = \frac{\pi[D^4 - d^4]}{32D},$ $I_x = \frac{\pi[D^4 - d^4]}{64},$	$W_x = \frac{M_{оп}}{[\sigma]},$	$M_{оп} = W_x [\sigma]$	Метод Верещагина Для криволинейной эпюры грузового состояния $\delta EI_x = (2Aa + 2Bb + Ab + Ba)$  Для криволинейной эпюры грузового состояния $\delta EI_x = (Aa + Bb + 4Cc)$	Нормальные напряжения $\sigma = \frac{My_e}{I_x}$  Касательные напряжения $\tau = \frac{QA^{отс} y^{отс} c}{I_x}$	$\sigma_{max} = \frac{M_{оп}}{W_x}$ Максимальные касательные напряжения для простых сечений  прямоугольник $\tau_{max} = \frac{3Q}{2A}$ Круг $\tau_{max} = \frac{4Q}{3A}$ кольцо $\tau_{max} = \frac{2Q}{A}$	

--	--	--	--	--	--	--	--