*Лабораторная работа № 3*

# МНОЖЕСТВА И МАТРИЦЫ

***Цель:*** *научиться**выполнять математические операции над множествами, строить диаграммы Эйлера-Вена. Освоить основы матричных вычислений, способы* *решения систем линейных уравнений в среде табличного процессора Microsoft Ecxel*

**Теоретические сведения**

Множество - это совокупность, класс отличающихся друг от друга объектов, объединенных каким-либо общим свойством. Объекты, входящие в эту совокупность, называются элементами множества.

1. Если каждый элемент множества А принадлежит множеству В, то **А называют подмножеством множества В.**
2. Обозначения: А В ( **А принадлежит В,** А включено в В, А содержится в В и т.д.), В А ( В включает А, В содержит А и т.д.).
3. Если А В и существует хотя бы один элемент множества В, не принадлежащий множеству А, то А – собственная часть В, т.е. **А строго включается в В**. Обозначение: А В.
4. Множества А и В называются **равными**, если А В и В А. Обозначение: А = В.
5. **Объединением** (суммой множеств А и В называется множество, обозначаемое через АВ, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству А или В. Краткая запись: АВ = {x | xA или хВ}.
6. **Пересечением** (произведением) множеств А и В называется множество, обозначаемое через АВ и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат множеству А и множеству В. Краткая запись: АВ = {x | xA и хВ}.
7. **Разностью множеств** А и В называется множество, обозначаемое через А\В и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат А и не принадлежат В. Краткая запись: А\В = {x| xA и xB}.

# Матричные вычисления

Прямоугольной матрицей размера m\*n называется совокупность m\*n чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Мы будем записывать ее в виде:



Сокращенно матрицу можно задать в виде A = (ai j) (i =1..m; j = 1..n), числа ai j, называются ее элементами; первый индекс указывает на номер строки, второй - на номер столбца. A = (ai j) и B = (bi j) одинакового размера называются равными, если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть A = B, если ai j = bi j.

Матрица, в которой элементы главной диагонали aii равны 1, а остальные 0 называется единичной и обозначается буквой Е:

.

**1.** **Транспонирование матриц**

Транспонировать матрицы можно произвольной размерности, так как при транспонировании строки и столбцы меняются местами. Чтобы выполнять транспонирование матрицы А:

1. Заполним ячейки таблицы значениями элементов матрицы



2. Выделяем мышкой при нажатой левой кнопке соответствующий диапазон ячеек (обратный исходной матрице).

3. Вызываем мастер функций и в категории «Полный алфавитный перечень находим функцию «ТРАНСП» и нажимаем ОК.

4. В появившемся окне вводим диапазон значений исходной матрицы.

5. Для получения результата зажимаем клавиши «Shift» + «Ctrl», и не отпуская их нажимаем клавишу «Enter».



**2. Умножение матрицы на число**

1. Берем прямоугольную матрицу 

2. Записываем в ячейке В \* 5.

3. Выделяем ячейку с первым значением матрицы

4. Пишем в строке формул умножение первого значения матрицы на 5 «=L3\*5»

5. Растягиваем получившееся значение до конечного вида прямоугольной матрицы.



1. **Сложение матриц**
2. Вводим значения двух прямоугольных матриц в Excel.
3. 

2.Записываем в пустой ячейке «A+B=»

3.Выделяем ячейку с первым значением матрицы

4. Пишем в строке формул сложение двух матриц «=C3+K3».

5. Растягиваем получившееся значение до конечного вида прямоугольной матрицы. 

**4.Умножение матриц**

1. Вводим значения двух матриц А и В в Excel

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 7 | 9 |  |  |  | 8 | 6 |  |
| А= | 1 | 2 | 3 |  |  | В= | 2 | 9 |  |
|  | 6 | 3 | 6 |  |  |  | 5 | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

2. Выделяем мышкой при нажатой левой кнопке соответствующий диапазон ячеек (обратный исходной матрице).

3. Вызываем мастер функций и в категории «Полный алфавитный перечень находим функцию «МУМНОЖ» и нажимаем ОК.

4. В появившемся окне вводим диапазон значений исходной матрицы.

5. Для получения результата зажимаем клавиши «Shift» + «Ctrl», и не отпуская их нажимаем клавишу «Enter».

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 99 | 111 |  |
| А\*В= | 27 | 30 |  |
|  | 84 | 75 |  |

**5. Обратная матрица**

1. Заполним ячейки таблицы значениями элементов матрицы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 6 | -7 | 1 |
| А= | 3 | -5 | 5 |
|  | 8 | 14 | 9 |

2. Выделяем мышкой при нажатой левой кнопке соответствующий диапазон ячеек (обратный исходной матрице).

3. Вызываем мастер функций и в категории «Полный алфавитный перечень находим функцию «МОБР» и нажимаем ОК.

4. В появившемся окне вводим диапазон значений исходной матрицы.

5.Для получения результата зажимаем клавиши «Shift» + «Ctrl», и не отпуская их нажимаем клавишу «Enter».

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0,164520744 | -0,110157368 | 0,042918455 |
| Аобр= | -0,018597997 | -0,065808298 | 0,038626609 |
|  | -0,117310443 | 0,200286123 | 0,012875536 |

**6. Метод Крамера**

1.Дана система линейных уравнений

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X1+ |  | X2+ | 2 | X3= | -1 |
| 2 | X1+ |  | X2+ | 2 | X3= | -4 |
| 4 | X1+ |  | X2+ | 4 | X3= | -2 |
|  |  |  |  |  |  |  |

2. Заполним ячейки таблицы значениями элементов матрицы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 1 | 2 |
| A= | 2 | 1 | 2 |
|  | 4 | 1 | 4 |

3. Находим главный определитель матрицы

D=(МОПРЕД($K$2:$M$4)); D=6

6. Подставляем вместо первого столбика коэффициентов столбик исходных значений.

|  |
| --- |
|  |
|  | -1 | 1 | 2 |  |
| Ax1= | -4 | 1 | 2 |  |
|  | -2 | 1 | 4 |  |
|  |  |  |  |  |

1. Находим и первый определитель Dx1 =МОПРЕД($K$8:$M$10)

Dx1=6

8. Подставляем вместо второго столбика коэффициентов столбик исходных значений.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -1 | 2 |  |
| Ax2= | 2 | -4 | 2 |  |
|  | 4 | -2 | 4 |  |
|  |  |  |  |  |

9. Аналогично нахождению главного определителя находим и второй определитель

Dx2 =МОПРЕД($K$12:$M$14)

Dx2=12

10. Подставляем вместо третьего столбика коэффициентов столбик исходных значений

|  |
| --- |
|  |
|  | 1 | 1 | -1 |  |
| Ax3= | 2 | 1 | -4 |  |
|  | 4 | 1 | -2 |  |
|  |  |  |  |  |

11. Аналогично нахождению главного определителя находим и третий определитель

Dx3= МОПРЕД($K$16:$M$18)

Dx3= -12

12. Находим первое решение Х1. Для этого используем специальную математическую формулу Крамера. Для этого находим отношение:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1= | Dx1 | = | 6 | = | 1 |
|  | D |  | 6 |  |  |

13. Находим второе решение Х2. Аналогично используем формулу Крамера:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X2= | Dx2 | = | 12 | = | 2 |
|  | D |  | 6 |  |  |

14. Находим третье решение Х3. Аналогично используем формулу Крамера

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X3= | Dx3 | = | -12 | = | -2 |  |
|  | D |  | 6 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Ответ**: В итоге мы находим три решения матрицы по методу Крамера

Х1= 1

Х2= 2

Х3= -2

**7. Матричный способ решения**

1.Дана система линейных уравнений

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | X1+ | 3 | X2+ | 4 | X3= | 2700 |  |
| 2 | X1+ | 1 | X2+ | 1 | X3= | 900 |  |
| 3 | X1+ | 2 | X2+ | 2 | X3= | 1600 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Заполним ячейки таблицы значениями элементов матрицы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 3 | 4 |
| A= | 2 | 1 | 1 |
|  | 3 | 2 | 2 |

3. Находим главный определитель матрицы

D=МОПРЕД($K$2:$M$4)

4. В появившемся окне вводим диапазон значений исходной матрицы: D=1

5. Находим обратную матрицу.

A-1=МОБР(K2:M4)

6.Чтобы найти решение системы уравнений нам следует умножить обратную матрицу на столбик свободных членов исходной матрицы

X= МУМНОЖ(K8:M10;H2:H4)

1. В итоге получаем результат решения матрицы с помощью матричного способа.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x= | 200 | |
|  | 300 | |
|  | 200 | |
|  |  |

1. Нужно проверить правильно ли мы решили. Для этого нужно снова прибегнуть к помощи матричного умножения. Умножаем исходную матрицу А на значения переменных х:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | | 3 | | 4 | |  |
| A= | 2 | | 1 | | 1 | |  |
|  | 3 | | 2 | | 2 | |  |
|  |  |  |  |  | |

Умножаем на:

|  |  |
| --- | --- |
| x= | 200 |
|  | 300 |
|  | 200 |
|  |  |

1. Для проверки вычислений можно использовать функцию умножения матриц А\*Х, в результате должна получиться матрица свободных членов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 2700 |
| Проверка: | А\*Х=В= | 900 |
|  |  | 1600 |

10. В итоге получаем исходные значения свободных членов матрицы В.

#### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

**Задание № 1. Выполните операции над множествами и представьте результат с помощью диаграмм Эйлера-Венна**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | A={b, e, f, k, t};  B={f, i, j, p, y};  C={j, k, l, y};  D={i, j, s, t, u, y, z};  *X* *A**C**B**C*;  *Y* *A**B**D*\*C* |  | A={c, m, n, o, q};  B={c, d, m, w};  C={m, n, q}; D={c, m, p};  *X* *A**B**C* ;  *Y* *A**B**C* \ *D* |
|  | A={a, h, m, o, r};  B={j, k, o, u, y};  C={g, h, j};  D={g, j, q};  *X* *A**C**D**B*;  *Y* *A**B**D*\*C* |  | A={b, d, l, p};  B={b, d, e, l, p, x}  C={k, l, p, t};  D={d, k, o, p, q, u, v};  *X* *A\B**C**D* ;  *Y* *A*не*B**C\D)* |
|  | A={c, e, h, n};  B={e, f, k, n, x};  C={b, c, h, p, r, s};  D={b, e, g};  *X* *A\В*С*D*;  *Y* *A**B**D*\*C* |  | A={a, b, f, g, i};  B={c, f, g, i, s, v};  C={a, g, h, i};  D={f, w, x};  *X*  *A**B* С;  *Y* *A*не*B* *C* \D |
|  | A={b, f, g, m, o};  B={b, g, h, l, u};  C={e, f, m};  D={e, g, l, p, q, u, v};  *X* *A**С**B*;  *Y* *A**B**C* \ *D* |  | A={b, c, h, I, j};  B={e, h, I, s, w};  C={a, b, j, k, l, m};  D={a, h, I, w, x};  *X* *A*\*С**B* ;  *Y* *A**B**С* \ *D* |
|  | A={a, e, f, i};  B={a, b, k, n};  C={e,f,n,o,w,x}; D={a,d,e,o,p,t,u};  X=(AD  *Y* ненеCD) |  | A={a, b, h, j, l};  B={b, c, h, l, r, v};  C={j, k, n, t, z};  D={b, i, k, v, w};  *X* *A**В**С*;  *Y* *A**B*\ *C**D* |

**Задание № 2. Решите задачу, пользуясь диаграммами Эйлера-Венна**

1. Министерство послало в один из лицеев инспектора для проверки, как в нем ведется преподавание иностранных языков. Сотрудник министерства в отчете записал, что в лицее учатся 100 детей. Каждый изучает по крайней мере один из трех языков: французский, немецкий или испанский. Причем все три языка изучают 5 человек; немецкий и испанский 10; французский и испанский 8; немецкий и французский 20; испанский 30, немецкий 23, французский 50. Инспектор, представивший отчет, был уволен. Почему?
2. Все мои друзья занимаются каким-нибудь видом спорта. 16 из них увлекаются футболом, а 12-баскетболом, 12-любят хоккей. Трое из них увлекаются и футболом и хоккеем, четверо занимаются и баскетболом и футболом, 5 человек увлекаются и хоккеем и баскетболом, и только двое из них занимаются тремя видами спорта одновременно. Посчитайте, сколько у меня друзей?
3. В классе всего 36 человек. Учащиеся посещают математический, физический и химический кружки, причем, математический кружок посещают 18 человек, физический - 14 человек, химический - 10 человек. Кроме того, известно, что все три кружка посещают 2 человека, математический и физический - 8,математический и химический - 5, физический и химический - 3. Сколько учеников класса не посещают никаких кружков?
4. Из 100 туристов, отправляющихся в заграничное путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским - 28, французским - 42. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским - 10, немецким и французским - 5, всеми тремя языками - 3. Сколько туристов не владеют ни одним языком?
5. В классе 30 человек. 18 из них каждый день пользуются метро, 16 — автобусом, 20 — троллейбусом, 10 — и метро, и троллейбусом, 10 — и метро, и автобусом, 9 — и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуются всеми тремя видами транспорта?
6. В футбольной команде «Спартак» 30 игроков, среди них 18 нападающих. 11 полузащитников, 17 защитников и вратари. Известно, что трое могут быть нападающими и защитниками, 10 защитниками и полузащитниками, 6 нападающими и защитниками, а 1 и нападающим, и защитником, и полузащитником. Вратари не заменимы. Сколько в команде «Спартак» вратарей?
7. В восьмом классе учится 40 человек. Каждый из них изучает не менее одного иностранного языка: английский, немецкий, французский. 34 человека изучают хотя бы один из двух языков: английский, немецкий. 25 человек — хотя бы один из языков: немецкий, французский. 6 человек только немецкий. Одновременно два языка — английский и немецкий — изучают на 3 человека больше, чем французский и немецкий языки. Сколько человек изучает каждый из языков и сколько изучает одновременно каждую пару языков?
8. В магазине побывало 65 человек. Известно, что они купили 35 холодильников, 36 микроволновок, 37 телевизоров. 20 из них купили и холодильник и микроволновку, 19 - и микроволновку, и телевизор, 15-холодильник и телевизор, а все три покупки совершили три человека. Был ли среди них посетитель, не купивший ничего?
9. В трёх седьмых классах 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?
10. Многие ребята нашего класса любят футбол, баскетбол и волейбол. А некоторые - даже два или три из этих видов спорта. Известно, что 6 человек из класса играют только в волейбол, 2 – только в футбол, 5 – только в баскетбол. Только в волейбол и футбол умеют играть 3 человека, в футбол и баскетбол – 4, в волейбол и баскетбол – 2. Один человек из класса умеет играть во все игры, 7 не умеют играть ни в одну игру. Требуется найти: а) Сколько всего человек в классе? b) Сколько человек умеют играть в футбол? c) Сколько человек умеют играть в волейбол?

**Задание № 3. Выполните операции с матрицами**

1. Задайте две матрицы А и В одинакового размера (4\*4), содержащие различные элементы.
2. Найдите определители для этих матриц.
3. Найдите сумму этих двух матриц и поместите ее в матрицу S.
4. Задайте матрицу C, количество строк этой матрицы должно быть равно количеству столбцов А.
5. Найдите произведение матриц А и С и поместите результат в матрицу Р.
6. Транспонируйте матрицу Р.

**Задание № 4. Решить систему линейных уравнений**

Найти решение системы линейных уравнений матричным способом. В этом случае для нахождения неизвестных переменных X находят обратную матрицу для исходной матрицы А и умножают ее на матрицу свободных членов В (AX=B, тогда X=A1B).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -2x1+3x2 +6x3=1200  4x1 -5x2 +7x3=2600  x1 +2x2 -3x3=3800 |  | 7x1+4x2 =4151  -2x1 +x2 +7x3=3250  7x1 -3x2 +6x3=2864 |
|  | -5x1+x2 +2x3=2639  3x1 +9x3=2600  10x1 +2x2 -7x3=3800 |  | 5x1+3x3=4085  -2x2 +7x3=2441  x1 +3x2 -x3=2866 |
|  | 2x1+8x2 +5x3=4707  6x1 +3x2 +10x3=4483  7x2 +8x3=3920 |  | 8x1+7x2 +5x3=2064  6x1 +8x2 +x3=1656  x1 +4x2 +7x3=1665 |
|  | 8x1-2x2 +4x3=3908  8x1 -2x2 +x3=3777  -3x1 +2x2 -2x3=3734 |  | 8x1+3x2 +9x3=2631  10x1 +6x2 +2x3=1996  -x2 +9x3=1521 |
|  | 7x1-2x3=2305  -3x1 +2x2 +5x3=3997  8x1 -1x2 +5x3=2201 |  | -2x1+2x2 +7x3=2642  6x1 -2x2 +3x3=4013  3x1 +x3=3803 |

**Задание № 5. Решите задачу матричным методом**

Три сотрудника некоторой фирмы имеют различную зарплату. Первый получает вдвое больше второго, второй и третий вместе – вдвое больше первого. Какую зарплату получает каждый, если известно, что вместе они отчисляют подоходный налог 1000$ при 13% ставке.

***Примечание.*** При решении этой заданий применяйте ***матричный метод***. Для вычислений применяйте функции МОБР() и МУМНОЖ().

При вводе функции массива используйте клавиши Ctrl+Shift+Enter.

**Контрольные вопросы:**

1. Что такое множество?
2. Какие существуют способы задания множества?
3. Какие множества называются равными?
4. Что такое пересечение множеств?
5. Что называется объединением множеств?
6. Что называется разностью множеств?
7. Что называется симметрической разностью множеств?
8. Что представляет собой матрица имеет порядок n\*m ?
9. Какие матрицы называются равными?
10. Какая матрица называется квадратной?
11. Что представляет собой симметричная матрица?
12. Какая матрица называется единичной?
13. Какие матрицы можно складывать?
14. В каком случае можно умножить одну матицу на другую?
15. Пусть существуют произведения AB И BA. Всегда ли AB = BA?
16. Какая матрица называется транспонированной относительно данной?