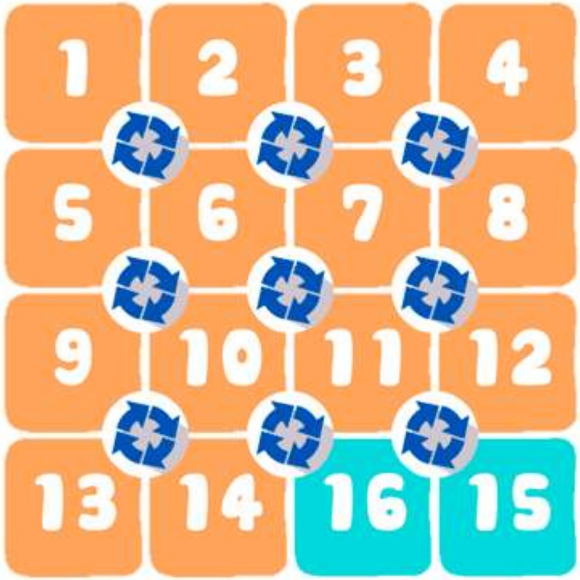
Комбинаторика

- **Комбинации**
- **Размещения**
- **Сочетания**



План

1) Комбинаторика как наука
2) Комбинации, некоторые задачи комбинаторики
3) Правило сложения
4) Правило умножения
5) Перестановки
6) Размещения
7) Сочетания

Комбинаторика

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучают вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству.

Термин «комбинаторика» придумал Лейбниц в 1666 году (в 20 лет)

<u>Задачи:</u>

1) Сколькими способами 6 разных книг можно расставить на полке?

2) При расследовании хищения установлено, что у преступника шестизначный номер, в котором все цифры различны и нет нулей. Следователь, полагая, что перебор этих номеров достаточно будет одного - двух часов, доложил о раскрытии преступления. Прав ли он?

3) Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых возможен один из трех ответов: «да», «нет», «не знаю». Найти число всех возможных способов заполнения анкеты.

Становление комбинаторики

Искусство составления комбинаций интересовало математиков давно. Азартные игры: кости, карты и другое. Д. Кардано, Н. Тарталья и Г. Галилей занимались математическим исследованием игры в кости.

Сегодня комбинаторика активно используется в криптографии (науке о шифровании данных для разработки новых шифров и для их взлома)

- криптография,
- искусственный интеллект,
- генетика,
- военное искусство,
- грамматика

Становление комбинаторики

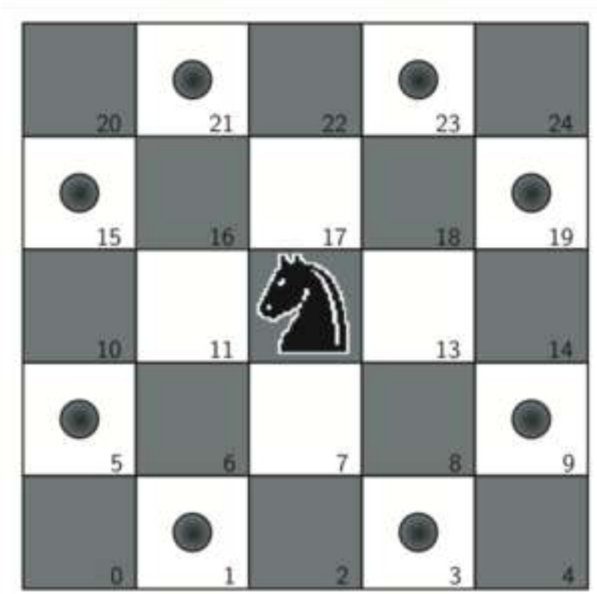
Сам термин «комбинаторика» придумал Лейбниц, который в 1666 году опубликовал книгу «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Ученик Лейбница Якоб Бернулли, один из основателей теории вероятностей, изложил в своей книге «Искусство предположений» (1713) множество сведений по комбинаторике. Окончательно комбинаторика как самостоятельный раздел математики оформилась в трудах Эйлера. Он детально рассмотрел, например, следующие проблемы:

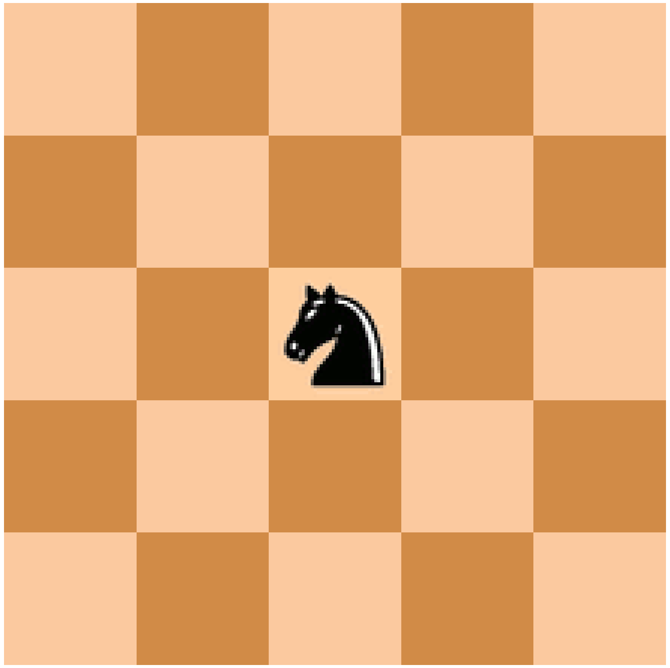
- задача о ходе коня;
- задача о семи мостах, с которой началась теория графов;
- построение греко-латинских квадратов;
- обобщённые перестановки.

Задача о ходе коня

Задача о ходе коня — задача о нахождении маршрута шахматного коня, проходящего через все поля доски по одному разу.

Эта задача известна по крайней мере с XVIII века. Леонард Эйлер посвятил ей большую работу «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не подчиняется никакому исследованию»





Латинские квадраты

Латинский квадрат n-го порядка — таблица размеров $n \times n$, заполненная n элементами множества M таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы каждый элемент из M встречается в точности один раз

♠	♥
♥	♠

A	B	C
C	A	B
B	C	A

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Латинские квадраты находят широкое применение в алгебре, комбинаторике, статистике, криптографии, теории кодов и многих других областях. Существует ряд игр, в которых используются латинские квадраты. Наиболее известна из них *судоку*. В ней требуется частичный квадрат дополнить до латинского квадрата 9-го порядка, обладающего дополнительным свойством: все девять его подквадратов содержат по одному разу все натуральные числа от 1 до 9.

Греко-латинские квадраты или квадраты Эйлера

Греко-латинский квадрат N×N в каждой клетке которого стоят 2 числа от 1 до N так, что выполняются следующие условия:

- в каждой строке и столбце каждая цифра встречается один раз на первом месте в паре, и один раз на втором.
- каждая цифра стоит в паре с каждой другой цифрой и с самой собой по одному разу.

1	3	5	2	4
2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3

Латинский

11	32	53	24	45
23	44	15	31	52
35	51	22	43	14
42	13	34	55	21
54	25	41	12	33

Греко-латинский

1	8	15	17	24
12	19	21	3	10
23	5	7	14	16
9	11	18	25	2
20	22	4	6	13

Магический

Греко-латинские квадраты или квадраты Эйлера

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

A α	**B** γ	**C** δ	**D** β
B β	**A** δ	**D** γ	**C** α
C γ	**D** α	**A** β	**B** δ
D δ	**C** β	**B** α	**A** γ

Сам Эйлер поставил задачу о нахождении квадрата 6 порядка так:

В 6 полках есть 36 офицеров 6 различных званий. Нужно так разместить их в каре, чтобы все офицеры в каждой колонне и шеренге были разных званий и из разных полков. Как уже было указано, такая задача неразрешима.

Другая задача звучит так: нужно разложить 16 карт (валеты, дамы, короли и тузы разных мастей) так, чтобы в каждом ряду и столбце было по одной карте каждой масти и значения. Эта задача была известна ещё до Эйлера. Её решением будет любой греко-латинский квадрат порядка 4. Для этой задачи также есть варианты, в которых дополнительно требуется, чтобы на главных диагоналях выполнялись те же требования. В другом варианте требуется, чтобы цвета мастей шли в шахматном порядке.

Все эти задачи имеют решения.

Греко-латинские квадраты

3-го порядка

C	B	A
A	C	B
B	A	C

4-го порядка

$$\begin{bmatrix} a & b & d & c \\ b & c & a & d \\ c & d & b & a \\ d & a & c & b \end{bmatrix}$$

5-го порядка

B2	A3	E4	C5	D1
E3	D5	A1	B4	C2
A5	C4	D2	E1	B3
C1	E2	B5	D3	A4
D4	B1	C3	A2	E5

Уже в 1725 году греко-латинские квадраты существовали как головоломки с игральными картами.

Греко-латинские квадраты полезны для разработки научных экспериментов и эффективной организации турниров

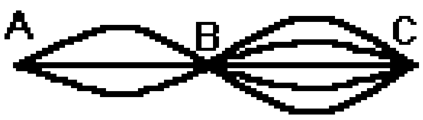
Комбинации

Комбинация — сочетание, соединение, взаимообусловленное расположение чего-либо, например, цифр, букв, звуков.

Перестановки **Размещения** **Сочетания**

1) Сколько существует трёхзначных чисел?

2) Сколько способов проехать из *A* в *C*, если система дорог такова, как показано на рисунке?



3) Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слова МАМА?

МАМА, МААМ, ААММ, АМАМ, ММАА, АММА – 6 способов

3) Правило сложения

<u>Принцип сложения:</u> Если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** – ***m*** способами, то объект «***a или b***» можно получить **n+m-k** способами, где ***k*** – это количество повторяющихся способов.

- **<u>Задача 1</u>**: В группе 7 девушек и 8 юношей. Сколькими способами можно выбрать 1 человека для работы у доски?

  Решение: 7+8=15

- **<u>Задача 2:</u>** В группе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек – «5» по философии. В сессии 2 экзамена. Известно, что 4 человека сдали сессию отлично. Сколько человек имеют хотя бы одну пятерку в сессии?

  Решение: 7+9-4=12

<u>Теоретико-множественная формулировка</u>

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Правило сложения

Если элемент А можно выбрать n способами, а элемент В можно выбрать m способами, то выбрать А или В можно n+m способами.

Например: из пункта А в пункт Б можно добраться:

- самолетом (2 авиамаршрута)
- поездом (1 маршрут)
- автобусом (3 маршрута)

Тогда общее число маршрутов 2+1+3=6

Ответ: 6 маршрутов.

4) Правило умножения

Правило умножения: если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, а объект **b m** способами, то объект ***«а и b»*** можно получить **m·n** способами.

Задача: Плохо разбирающийся в программном обеспечении студент пытается подобрать к 5 принтерам драйвер из 7 имеющихся. Сколько комбинаций «принтер-драйвер» он может составить?

Решение: 5·7=35.

<u>Теоретико-множественная формулировка</u>

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Правило умножения

Если элемент A можно выбрать n способами и, при любом выборе A (то есть независимо), элемент B можно выбрать m способами, то пару (A, B) можно выбрать n*m способами.

Рассмотрим следующую задачу:

Сколько можно записать двузначных чисел в десятичной системе счисления?

Поскольку число двузначное, число десятков может принимать одно из девяти значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Число единиц может принимать значения от 0 до 9, то есть всего 10.

Общее количество двузначных чисел равно 9*10=90.

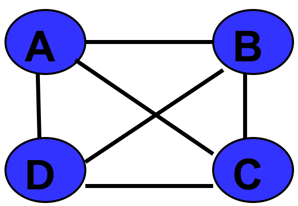
<u>1</u> <u>0</u>

<u>9</u> <u>9</u>

Правила суммы и произведения

1. Сколько различных коктейлей можно составить из четырёх напитков, смешивая их в равных количествах по два?

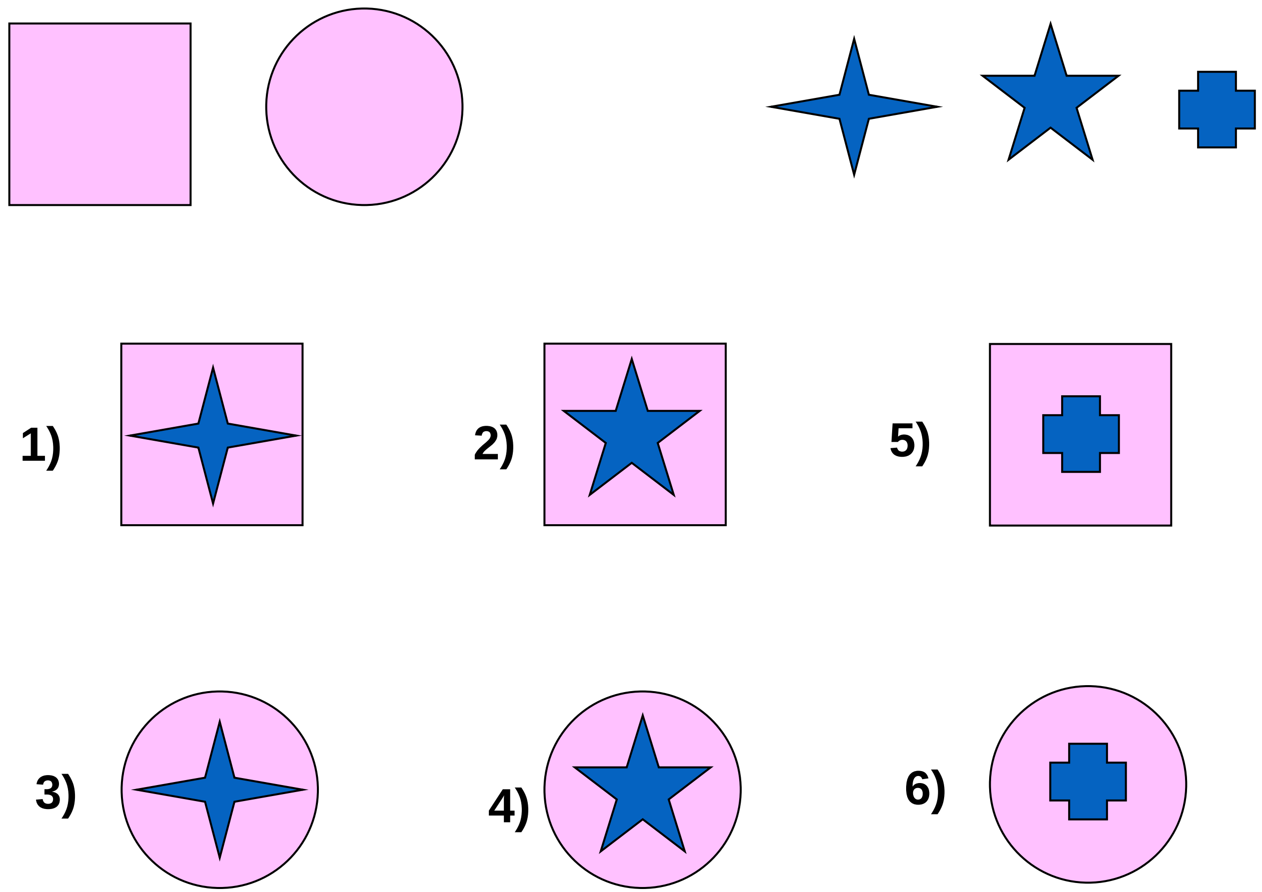
- AB, AC, AD, BC, BD, CD – всего 6 коктейлей



2. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3 ?

Первой цифрой двузначного числа может одна из цифр 1, 2, 3 (цифра 0 не может быть первой). Если первая цифра выбрана, то вторая может быть любая из цифр 0, 1, 2, 3. Т.к. каждой выбранной первой соответствует четыре способа выбора второй, то всего имеется $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3 = 12$ различных чисел.

Правило умножения (пример)



$2 \cdot 3 = 6$ способов

5) Перестановки

Пусть имеется k групп элементов, причем i-ая группа состоит из n_i элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdot \cdot n_k$$

— основная формула комбинаторики.





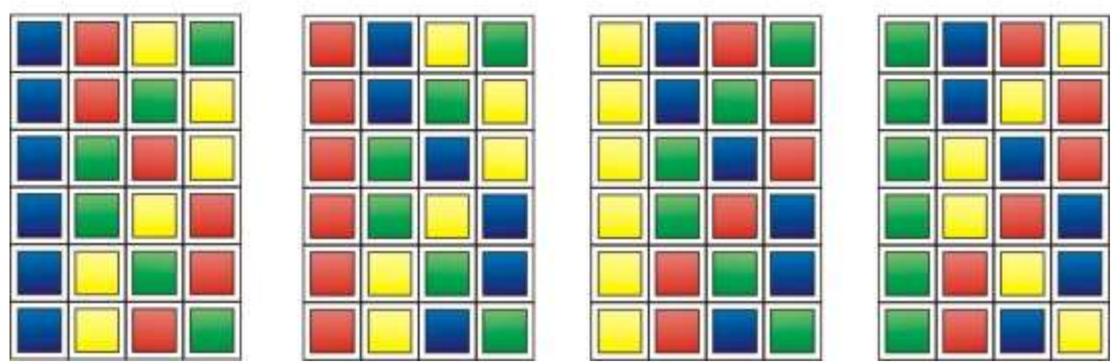
Перестановка

Перестановкой из **n** элементов называется любой **упорядоченный** набор из этих элементов.

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n\text{-}1) \cdots 2 \cdot 1 = n!}$$

$$P(3) = 3! = 3*2*1$$

Перестановки



Пусть дано множество, состоящее из 4 элементов.

Первый из четырёх элементов мы можем поставить на любую их 4 позиций, второй на любую из оставшихся 3 позиций, третий на любую из оставшихся 2 позиций, четвертый на одну позицию.

Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n\text{-}1) \cdots 2 \cdot 1 = n!}$$

$\mathbf{P_n = n! = 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 24}$ перестановки

Перестановки без повторений

Перестановкой *n* элементного множества называется упорядоченный набор неповторяющихся элементов этого множества длины ***n*.**

Пример: пусть дано:

$$A = \{a; b; c;\}$$

- перестановки: $(a; b; c); (b; a; c); (a; c; b); (b; c; a); (c; a; b); (c; b; a)$

- Число размещений ***n*** – элементного множества обозначается $\boldsymbol{P_n}$ и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

- **<u>Задача</u>**: Сколькими способами можно осуществить сортировку 6 файлов в данном каталоге?

$$P_6 = 6! = 720$$

* Перестановки с повторениями

Рассматривая перестановки ранее, мы предполагали, что **n** элементов различны.

Если среди **n** элементов есть **n1** элемент одного вида, **n2** элементов другого вида и т.д., **nk** элементов **k**-го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число:

$$\overline{P}_n(n_1,..,n_k) = \frac{n!}{n_1!.....n_k!}, где \quad n_1 + ... + n_k = n$$

<u>Пример 4.</u>

Сколько различных «слов» можно составить из букв слова **ДЕД**?

n=3, k=2, n1=2, n2=1

$$\overline{P}_3(2,1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

* Перестановки с повторениями

Пример 5. Слова и фразы с переставленными буквами называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова «макака»?

Решение.

Всего в слове «**МАКАКА**» 6 букв (**m=6**).

Определим сколько раз в слове используется каждая буква:

«М» - 1 раз (**k1=1**)

«А» - 3 раза (**k2=3**)

«К» - 2 раза (**k3=2**)

$$P = \frac{m!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \quad \Rightarrow \quad P_{1,3,2} = \frac{6!}{1!\, 3!\, 2!} = \frac{4*5*6}{2} = 60.$$

Перестановки с повторениями

Последовательность длины n, составленная из k разных символов, первый из которых повторяется n_1 раз, второй — n_2 раз, третий — n_3 раз,…, k-й — n_k раз (где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) называется **перестановкой с повторениями** из n элементов.

Число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Задача: Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове в слове «математика»?

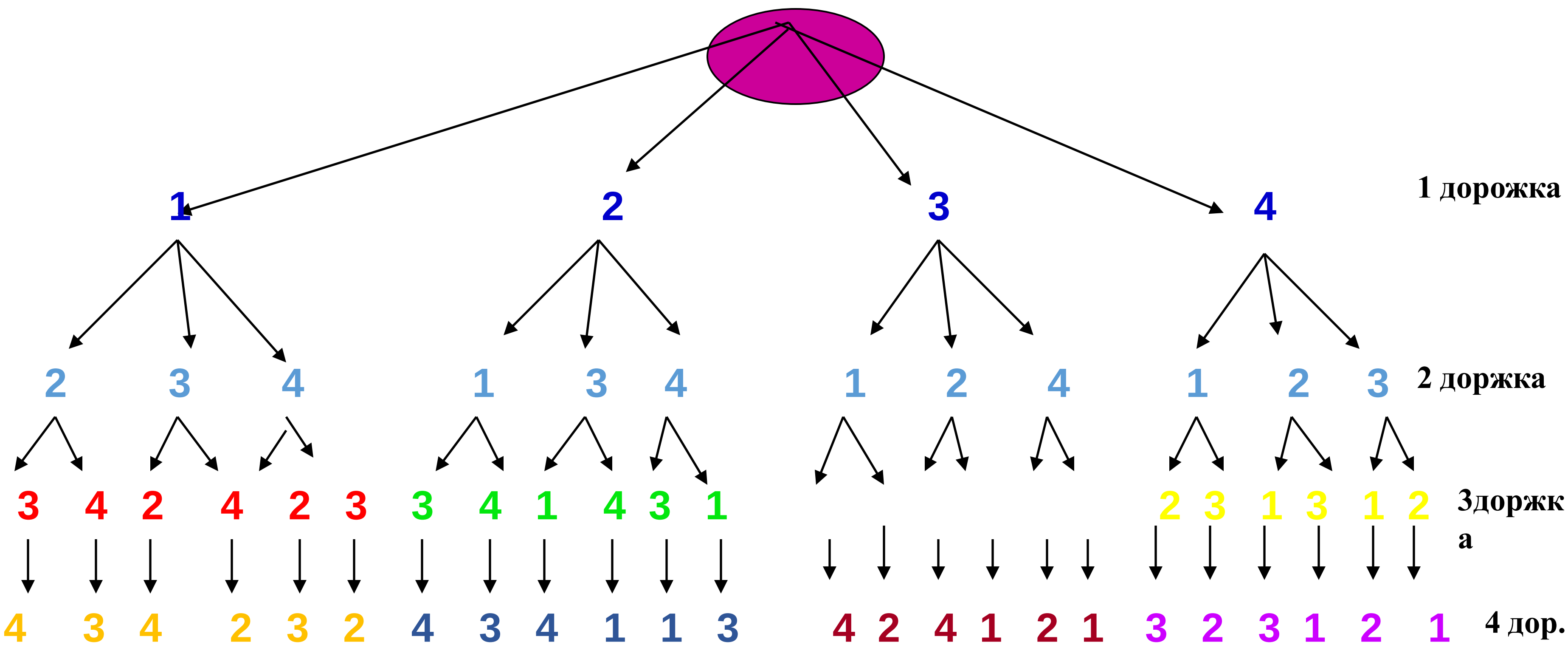
Решение:

$$7! = 5040$$

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

Перестановки

1. **Сколькими способами могут быть расставлены 4 участницы финального забега на четырёх беговых дорожках?**



$P_n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ **способа** **(перестановки из 4-х элементов)**

Размещение

Размещением из **n** элементов по **m** называется любой **упорядоченный** набор из **m** различных элементов, выбранных из общей совокупности в **n** элементов. А-первая буква французского слова Arrangement, что означает приведение в порядок

(Размещения из четырех чисел 1, 2, 3, 4 по два:

(1,2), (1,3), (1,4),
(2,1), (2,3), (2,4),
(3,1), (3,2), (3,4),
(4,1), (4,2), (4,3).

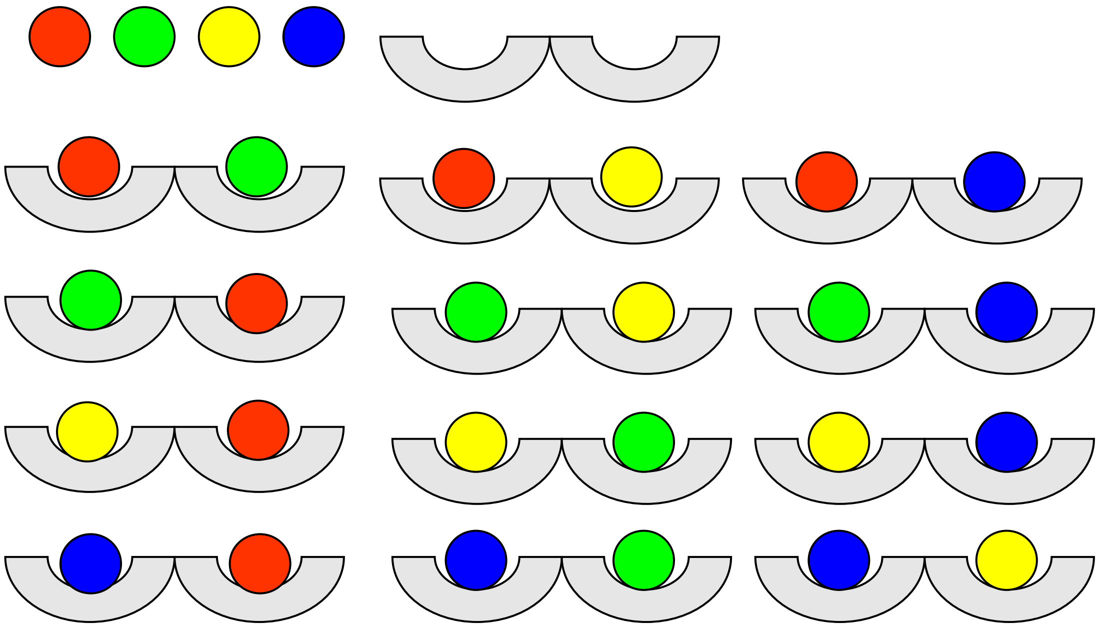
Без повторений

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

С повторениями

$$A_n^k = n^k$$

Размещений без повторений



$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = \frac{24}{2} = 12$$

Размещения без повторений

Размещением без повторений элементов множества *A* называется упорядоченный набор длины *k* попарно различных элементов множества *A*.

$$A = \{a; b; c\}$$

Пример: пусть дано множество А

размещения по 2 элемента:

$$(a;b);(a;c);(b;c);(b;a);(c;a);(c;b)$$

Число размещений

без повторений

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>Задача</u>: В олимпиаде по математике участвуют 12 команд. Сколькими способами они могут занять призовые места?

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Размещения без повторений

Комбинации, составленные из данных ***n*** элементов по ***m*** элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Расстановки считаются разными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, или расположены в различном порядке.

Такие расстановки называют A_n^k «размещения из n элементов по k»; А-первая буква французского слова Arrangement, что означает приведение в порядок).

Справедлива формула:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)$$

Размещения без повторений

Размещением без повторений элементов множества *A* называется упорядоченный набор длины *k* попарно различных элементов множества *A*.

Пример: пусть дано множество А

$$A = \{a; b; c\}$$

размещения по 2 элемента:

$$(a;b);(a;c);(b;c);(b;a);(c;a);(c;b)$$

Число размещений

без повторений

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задача: В олимпиаде по математике участвуют 12 команд. Сколькими способами они могут занять призовые места?

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

Размещения с повторениями

Размещением с повторениями n–элементного множества называется упорядоченный набор длины k элементов данного множества.

$$A=\{a;b;c\}$$

Пример. Пусть дано 2- размещения с повторениями:

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b);(a;a);(b;b);(c;c)$$

Число k – размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$A_n^k=n^k$$

Задача: Сколько существует номеров машин?

Решение: существует 10 цифр и 29 букв, которые могут быть в номере, причем и цифра и буква могут повторяться. Значит используем размещения с повторениями.

$$A_{10}^3\cdot A_{29}^3=29^3\cdot 10^3=24389000$$

Задачи на размещения

Например, возьмем буквы ***Б, А, Р***. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если:

1) буквы в наборе не повторяются;
2) буквы могут повторяться?

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad A_n^k = n^k$$

Решение задачи

1) Размещение без повторений дает наборы:

БА, БР, АР, АБ, РБ, РА.

По формуле получаем: 6 наборов.

$$A_{n=3}^{k=2} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

2) Размещение с повторениями дает наборы:

ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.

По формуле получаем: 9 наборов.

$$A_{n=3}^{k=2} = 3^2 = 9$$

Размещения с повторениями

Задача: Сколько существует номеров машин?

Решение: существует 10 цифр и 29 букв, которые могут быть в номере, причем и цифра и буква могут повторяться. Значит используем размещения с повторениями.

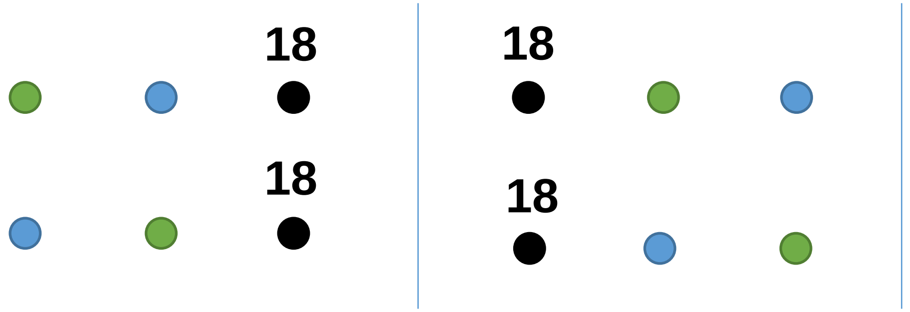
$$A_n^k = n^k$$

$$A_{10}^3 \cdot A_{29}^3 = 29^3 \cdot 10^3 = 24389000$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задачи

1. Сколькими способами можно составить список из 5 студентов, если в группе 12 человек?
2. Сколькими способами можно составить список из 3 студентов, так, чтобы два указанных студента располагались рядом (в группе 20 человек)?



18*4=72

3. Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 студентов из 7?

Задачи

1. В первой группе класса «А» первенства по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные, бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?
2. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря, казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?
3. Расписание одного дня содержит пять уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из одиннадцати дисциплин

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В полуфинале по шахматам участвуют 20 человек, а в финал выходят только трое. Сосчитать число различных исходов полуфинала.
2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей?
3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?
4. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Сочетание

Сочетанием из **n** элементов по **k** называется любой **неупорядоченный** набор из **k** различных элементов, выбранных из общей совокупности в **n** элементов.

Сочетаниями из четырех чисел 1, 2, 3, 4

по два: (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4).

Без повторений

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

С повторениями

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Сочетание без повторений

Сочетанием из **n** элементов по **m** называется любой **неупорядоченный** набор из **m** различных элементов, выбранных из общей совокупности в **n** элементов.

Сочетаниями из четырех чисел 1, 2, 3, 4 по два:

(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)).

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Сочетания без повторений

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Задание. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Решение. Имеем 14 претендентов и 13 рабочих мест. Сначала выберем работников на первую специальность, то есть 4 женщин из 6:

$$C^4_6 = 6!/\ 4! \cdot 2! = 15.$$

Далее независимо аналогичным образом выберем мужчин на вторую специальность:

$$C^6_8 = 8!/\ 6! \cdot 2! = 28.$$

Осталось 2 женщины, 2 мужчин и 3 вакантных места, которые, по условию, могут занять любые из четырех оставшихся человек. Это может быть сделано 2 вариантами: 1. 1 женщина и 2 мужчин (выбираем женщину C^1_2 = 2 способами) 2. 1 мужчина и 2 женщины (выбираем мужчину C^1_2 = 2 способами). В итого получаем 15 · 28(2 + 2) = 1680 способов.

Ответ: **1680 способов.**

Сочетания с повторениями

Сочетания из n элементов по k называется всякая совокупность k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов

n (всего элементов)

k (по скольку элементов берем в сочетание)

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Сочетания с повторениями

Пример: дано множество элементов **A={a, b, c}.** Составим сочетания из двух элементов с повторениями.

Всего элементов здесь n=3, а сочетаем k=2.

Сочетания с повтором из двух элементов**:**

{a, b}, {b, c}, {a, c}, {a, a}, {b, b}, {c, c}

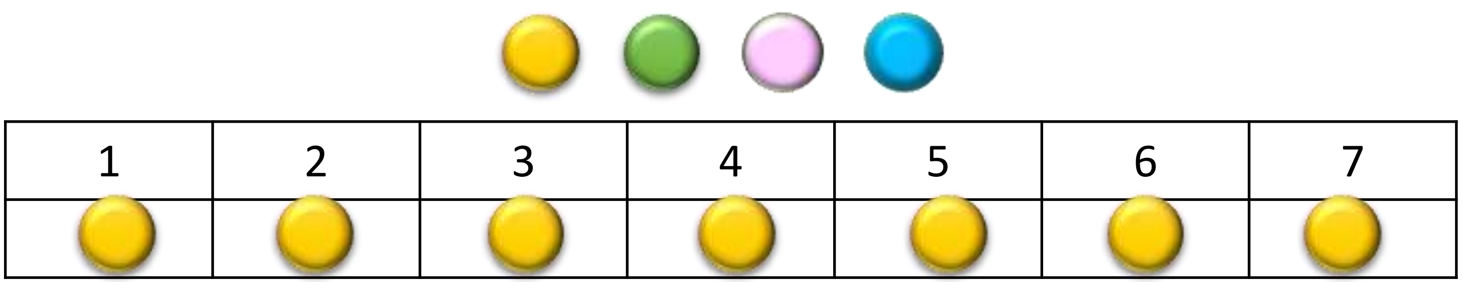
$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

C^k_n=(n+k-1)!/ k!(n-1)!=(3+2-1)!/2!(3-1)!=4!/4=6

Сочетания с повторениями

Пример. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и картошка. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Положим пирожные в коробку, а чтобы они не перепутались, разделим их картонными разделителями.



Сочетания с повторениями

Пример. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и картошка. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение

k - сколько пирожных надо взять - 7

n – число сортов пирожных - 4

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$\overline{C_4^7} = C_{4+7-1}^7 = \frac{(4+7-1)!}{7!(4-1)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3} = 120$$

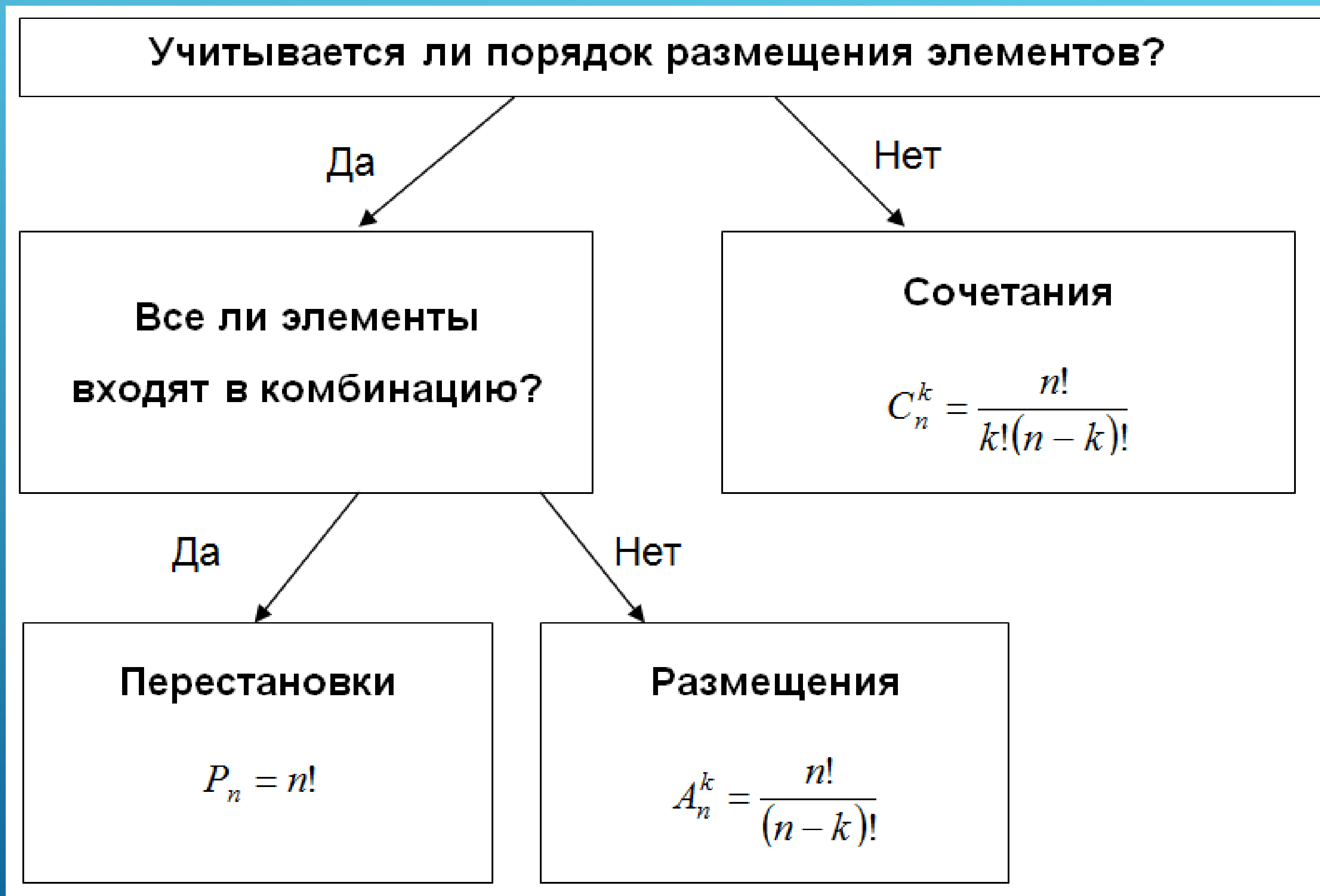
Сочетания с повторениями

В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

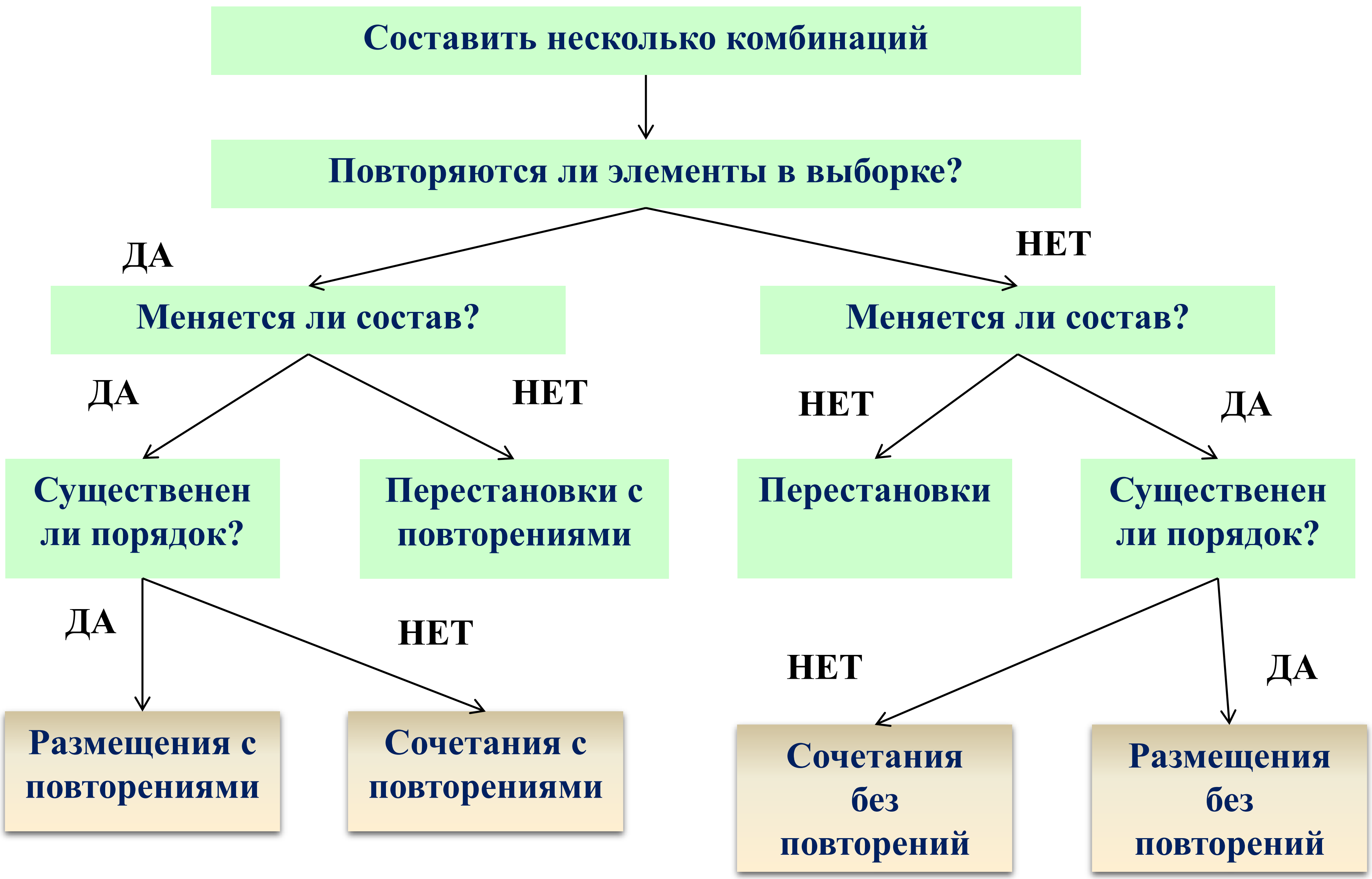
Решение. Обозначая булки белого и черного хлеба буквами Б и Ч, составим несколько выборок: ББББББ, ББЧЧББ, ЧЧЧЧЧБ, ... Состав меняется от выборки к выборке, порядок элементов несущественен, значит это - сочетания с повторениями из 2 по 6. По формуле получаем 7 способов.

Сделаем проверку и выпишем все варианты покупки: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ, БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Их действительно 7. $C^k_{n+k-1} = C^6_7 = 7!/(7-6)!6! = 7$

ТИП КОМБИНАЦИИ



Определение типа комбинации



	Перестановки – участвуют все элементы	Размещения- выбор части элементов, важен порядок	Сочетания- выбор части элементов, порядок не важен
Без повторов	**P=n!**	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
С повто-рами	$P_{n=n_1+n_2,+\ldots+n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots.n_k!}$	$A_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$

Количество повторов

Решение задач на перестановки

Задача 1:

На пяти карточках написаны буквы “п”, “л”, “а”,“м”,“а”. Карточки перемешиваются и выкладываются в ряд. Найти вероятность того, что образовавшееся слово будет “лампа” (событие А).

Решение.

- В соответствии с комбинаторными принципами для определения общего числа элементарных исходов нужно подсчитать число упорядоченных наборов из четырех букв. Мы имеем дело с числом перестановок, поэтому число элементарных исходов $\boldsymbol{n = 5! = 120}$. Слово “лампа” образует две перестановки, то есть число благоприятных для события **А** элементарных исходов $\boldsymbol{m = 2}$.
- Поэтому **P(A) = m/n =** 2/120=1/60.

Решение задач на сочетания

Задача :

Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадает на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадает различное число очков (не равное шести).

Решение.

Общее число элементарных исходов испытания равно числу сочетаний из шести элементов по три, то есть .

Число исходов, благоприятствующих появлению шестерки на одной грани и различного числа очков (не равного шести) на гранях двух других костей, равно числу соче-таний из пяти элементов по два, то есть .

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, к общему числу возможных элементарных исходов:

$$P = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{5!\cdot(6-3)!\cdot 3!}{(5-2)!\cdot 2!\cdot 6!} = \frac{1}{2}$$

Решение задачи

Благоприятствующими интересующему нас событию (хотя бы на одной грани появится шестерка, сумма выпавших очков — четная) являются следующие пять исходов (первым записано число очков, выпавших на “первой” кости, вторым — число очков, выпавших на “второй” кости; далее — сумма очков):

6, 2; 6+2 = 8,

6, 4; 6 +4= 10,

6, 6; 6+6 = 12

2, 6; 2+6 = 8

4, 6; 4+6 = 10

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих со-бытию, к числу всех исходов:

P(A) = 5/36.

Сочетания

Задача. Известно, что в поступившей партии из 30 швейных машинок 10 имеют внутренний дефект. Определить вероятность того, что из пяти наудачу взятых машинок три окажутся бездефектными.

Решение:

Введем следующие обозначения: **N**— общее число машинок, **n** — число бездефектных машинок, **m** — число отобранных в партию машинок,

k — число качественных машинок в отобранной партии.

Общее число комбинаций по **m** машинок, то есть общее число возможных исходов, будет равно числу сочетаний из N элементов по **m:**

$$C_N^m = C_{30}^5$$

Но в каждой отобранной комбинации должно содержаться по три бездефектные машинки. Число таких комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по k, то есть

$$C_n^k = C_{20}^3$$

Оставшиеся дефектные машинки тоже образуют множество комбинаций, число которых равно числу сочетаний из **N-n** элементов по **m**-k:

$$C_{N-n}^{m-k} = C_{10}^2$$

Общее число благоприятных исходов определяется произведением:

$$C_{20}^3 \cdot C_{30-20}^{5-3} = C_{20}^3 \cdot C_{10}^2$$

Подставив в эту формулу численные значения данного примера, получим

$$P(A) = \frac{C_{20}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{30}^5} = \frac{20! \cdot 10!}{17! \cdot 3! \cdot 8! \cdot 2!} \cdot \frac{15! \cdot 5!}{30!} \approx 0{,}18$$

Задачи
на сочетания

Сочетания без повторений

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Задание. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Решение. Имеем 14 претендентов и 13 рабочих мест. Сначала выберем работников на первую специальность, то есть 4 женщин из 6:

C4 6 = 6! 4! · 2! = 15.

Далее независимо аналогичным образом выберем мужчин на вторую специальность:

C6 8 = 8! 6! · 2! = 28.

Осталось 2 женщины, 2 мужчин и 3 вакантных места, которые, по условию, могут занять любые из четырех оставшихся человек. Это может быть сделано 2 вариантами: 1. 1 женщина и 2 мужчин (выбираем женщину C1 2 = 2 способами) 2. 1 мужчина и 2 женщины (выбираем мужчину C1 2 = 2 способами). В итого получаем 15 · 28(2 + 2) = 1680 способов. Ответ: 1680 способов.

Сочетания с повторениями

Сочетания из n элементов по k называется неупорядоченная (n,k)-выборка с возможными **повторениями** элементов. Пример.

Пусть A = {1,2,3}. Перечислим все **сочетания с повторениями** из элементов множества A по 2:

1,1; 1,2; 1,3; 2,2; 2,3; 3,3.

В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

$$C_4^7 = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

Задачи на сочетания

Пример. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и картошка. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Положим пирожные в коробку, а чтобы они не перепутались, разделим их картонными разделителями. Нужно 3 разделителя. Обозначения: 0 (картонки-разделители) и 1 — пирожные. Примерная покупка: 1110101101 — три наполеона, 1 эклер, 2 песочных и 1 картошка.

$$\bar{C}_4^7 = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

Задачи на сочетания

В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

Решение. Обозначая булки белого и черного хлеба буквами Б и Ч, составим несколько выборок: ББББББ, ББЧЧББ, ЧЧЧЧЧБ, ... Состав меняется от выборки к выборке, порядок элементов несущественен, значит это - сочетания с повторениями из 2 по 6. По формуле получаем 7 способов.

Сделаем проверку и выпишем все варианты покупки: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ, БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Их действительно 7.

$$C_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_2^6 = \frac{(2+6-1)!}{6!(2-1)!} = 7$$

Тип комбинации