Задачи основного тура Олимпиады по математике

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos^2 x dx$. **(1)**

2. Доказать, что для любых положительных a, b, c выполняется неравенство

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}. \quad \mathbf{(2)}$$

3. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E – середина BB_1, точка F – середина C_1D_1. Найти расстояние от вершины A_1 до плоскости (AEF). **(2)**

4. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1/n} + \frac{1}{n+2/n} + \cdots + \frac{1}{n+n/n}\right). \quad \mathbf{(3)}$$

5. Даны две непрерывно-дифференцируемые функции $f(x)$ и $g(x)$, $x \in [a,b]$. Известно, что

$$\ln f(x) = g(x) + x \quad \forall x \in [a,b]$$

и функция $g(x)$ принимает внутри отрезка $[a,b]$ максимальное значение. Доказать, что существует $c \in (a,b)$, что $f'(c) = f(c)$. **(3)**

6. Пусть x_0 и A — два произвольно взятых положительных числа. Доказать, что для любого натурального $n \geq 2$ последовательность $\{x_k\}$ сходится к $a_0 = A^{1/n}$ при $k \to \infty$. Здесь

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + \frac{A}{x_k^{n-1}}\right). \quad \mathbf{(5)}$$

Ответы и решения задач

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2(1+\cos(2x))dx = \frac{x^3}{6}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(2x)dx =$ $\{$интегрирование по частям$\}$ $= \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}$.

2. Справедливы неравенства $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, $(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geq 0$, $(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 \geq 0$. Откуда $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $a+c \geq 2\sqrt{ac}$. Сложим эти неравенства и получим

$$2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}).$$

3. Совместим декартову систему координат $Oxyz$ с кубом так, чтобы вершины имели следующие координаты: $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $A_1(0,0,1)$, $B_1(1,0,1)$, $C_1(1,1,1)$, $D_1(0,1,1)$. Тогда т.$E(1,0,1/2)$, т.$F(1/2,1,1)$, а уравнение плоскости (AEF):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow -2x-3y+4z=0.$$

Поэтому расстояние от т.$A_1(0,0,1)$ до плоскости (AEF):

$$d = \frac{|-2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 4\cdot 1|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$

4. Оценим сумму снизу и сверху:

$$\frac{n}{n+n/n} \leq \frac{1}{n+1/n} + \frac{1}{n+2/n} + \cdots + \frac{1}{n+n/n} \leq \frac{n}{n+1/n}.$$

Пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+n/n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1/n} = 1$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n+1/n} + \frac{1}{n+2/n} + \cdots + \frac{1}{n+n/n}\Big) = 1.$$

5. Справедливо равенство: $\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)+1 \quad \forall x \in [a,b]$. По условию функция $g(x)$ принимает внутри $[a,b]$ максимальное значение, поэтому существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $g'(c)=0$. Тогда $\frac{f'(c)}{f(c)} = 0+1$.

6. Пусть $k=1$, тогда $x_1 = \frac{1}{n}\Big((n-1)x_0 + \frac{A}{x_0^{n-1}}\Big)$. Имеем

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{n}\Big(n-1+\frac{A}{x_0^n}\Big) = \frac{1}{n}\Big(n-1+\frac{a_0^n}{x_0^n}\Big), \tag{1}$$

$$\frac{x_1}{a_0} = \frac{1}{n}\Big((n-1)\alpha + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\Big), \tag{2}$$

где $\alpha = \dfrac{x_0}{a_0}$. Продифференцируем правую часть (2) по α:

$$f'(\alpha) = \left[\frac{1}{n}\Big((n-1)\alpha + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\Big)\right]' = \frac{n-1}{n}\Big(1 - \frac{1}{\alpha^n}\Big).$$

Видим, что $f(\alpha) = \dfrac{1}{n}\Big((n-1)\alpha + \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\Big)$ имеет минимум при $\alpha = 1$, если $\alpha > 0$, и $f(1) = 1$.

Тогда

1) Если $x_0 = a_0$, то $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \cdots = a_0$, то есть последовательность $\{x_k\}$ является стационарной и сходится к $a_0 = A^{1/n}$.

2) Если $x_0 > a_0$, то из (1): $\dfrac{x_1}{x_0} < 1 \Rightarrow x_1 < x_0$; из (2): $\dfrac{x_1}{a_0} > 1 \Rightarrow a_0 < x_1$ (так как $\alpha > 1$ и, соответственно, $f(\alpha) > 1$). Таким образом, для $x_0 > a_0$

$$a_0 < x_1 < x_0.$$

3) Если $x_0 < a_0$, то из (1): $\dfrac{x_1}{x_0} > 1 \Rightarrow x_0 < x_1$; из (2): $\dfrac{x_1}{a_0} > 1 \Rightarrow a_0 < x_1$ (так как $0 < \alpha < 1$ и, соответственно, $f(\alpha) > 1$). Таким образом, для $x_0 < a_0$

$$x_0 < a_0 < x_1.$$

В результате, из 2) и 3) по индукции следует, что для любого натурального k $a_0 < x_{k+1} < x_k$. То есть последовательность $\{x_k\}$ монотонно убывающая (начиная с $k = 1$) и ограничена снизу. Поэтому она имеет предел b_0.

Покажем, что $b_0 = a_0 = A^{1/n}$. Число b_0 не может быть меньше a_0, так как при этом, начиная с некоторого номера m, должно быть $x_m < a_0$. А это невозможно. В то же время число b_0 не может быть больше a_0, так как при этом из 2) следовало бы, что найдется член $x_{m'}$ последовательности $\{x_k\}$ такой, что $a_0 < x_{m'} < b_0 = x_{m'-1}$.