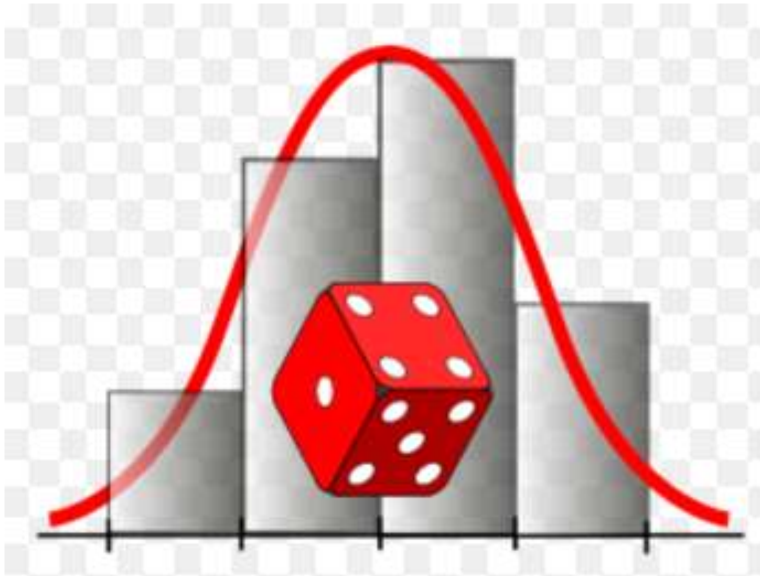
Теория вероятностей



План

- Событие
- Типы событий
- Предмет и задачи теории вероятностей
- Вероятность события и подходы к ее определению
- Аксиоматический подход (противоположные, совместные, равновозможные события, полная группа событий)
- Теорема сложения вероятностей
- Теорема умножения вероятностей
- Условная вероятность
- Полная вероятность
- Формула Байеса

Событие

Под **событием** будем понимать все то, что может произойти, а может не произойти.

Событие — не происшествие, а лишь возможный исход опыта, явления или наблюдения.

Например, события — а) сегодня ясный теплый день; б) первый вошедший в аудиторию человек — девушка).

События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, ..., Z.

Событие ***(явление)*** **–** возможный исход испытания, опыта, наблюдения.

Случайное событие - это событие, которое при равных условиях может произойти, а может и не произойти в данном испытании, то есть его появление нельзя гарантировать

ВИДЫ СОБЫТИЙ

СОБЫТИЯ

- ДОСТОВЕРНОЕ (произойдет обязательно)
- НЕВОЗМОЖНОЕ (не произойдет ни при каких обстоятельствах)
- ВЕРОЯТНОЕ (СЛУЧАЙНОЕ) (может произойти, а может и нет)

СОБЫТИЯ

- СОВМЕСТНЫЕ-НЕСОВМЕСТНЫЕ
- ЗАВИСИМЫЕ-НЕЗАВИСИМЫЕ
- РАВНОВОЗМОЖНЫЕ

Типы событий

Все наблюдаемые нами явления можно условно разделить на три вида: *достоверные невозможные и случайные*.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет, если будут выполнены определенные условия. Например, если в сосуде находится вода, давление атмосферы нормальное, а температура воздуха 30С, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии».

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет, если будет выполнена совокупность условий S. Например, при нагревании олова и меди вы не сможете получить золото.

Случайным называют событие, которое при осуществлении условий S может произойти, а может и не произойти. Например, при бросании монеты выпадение герба – является случайным событием, потому что оно может произойти, а может и не произойти.

Что изучает теория вероятностей?

Например, выпадение снега в Москве 30 ноября является случайным событием. Ежедневный восход Солнца можно считать достоверным событием, а выпадение снега на экваторе — невозможным событием.

Теория вероятностей изучает вероятностные законы, которые наблюдаются в массовых однородных случайных событиях.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые события позволяет предвидеть как эти события будут протекать.

Например, нельзя заранее определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число выпадений «орла» или «решки», если монета будет брошена большое число раз в одних и тех же условиях.

Задача теории вероятностей

Каждое случайное событие есть следствие действия очень многих сил и случайных причин, которые учесть просто невозможно. В нашем случае это сила броска, вес и размер монеты, ее симметричность, состояние здоровья человека, бросившего монету, и т.д.

Поэтому теория вероятностей не ставит себе задачу предсказать произойдет или нет **единичное случайное событие -** она просто не в силах это сделать.

Однако, когда речь идет о случайных событиях, которые многократно наблюдаются при осуществлении одних и тех же условий S, то есть происходят **массовые однородные случайные события**, то оказывается что они подчиняются определенным закономерностям.

Изучение вероятностных закономерностей

Классический подход
к определению понятия вероятности

Вероятность есть отношение числа благоприятных исходов испытания к общему числу равновозможных исходов. P(A)=m/n

игровая рулетка

Какова вероятность, P, того, что стрелка, остановившись, укажет на синий сектор?

$P = 1/4$

игральная кость

Какова вероятность, P, того, что “выпадет” чётное число?

$P = 1/2$

9 коричневых,
8 жёлтых,
7 оранжевых
из 40 шаров

Какова вероятность, P, того, что мы вытащим жёлтый шар?

$P = 8/40$

Какова вероятность, P, того, что мы вытащим коричневый или оранжевый?

$P = 16/40$

Классическая вероятность события P(A)

Вероятность события **A** равна отношению числа случаев **m**, благоприятствующих ему, из общего числа **n** единственно возможных, равновозможных и несовместимых случаев, к числу **n** формула Лапласа:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Например, имея колоду игральных карт из 36 листов, можно вытащить из нее любую карту. Вероятность вытащить каждую из 36 карт одинакова и равна P=1/36. Это событие является равновозможным и несовместимым с другими.

Определение классической вероятности события

1) Определить вероятность выбора из колоды карт в 36 листов карты красной масти.
2) Определить вероятность выбора из колоды карт в 36 листов карты червовой масти.
3) Определить вероятность выбора из колоды карт в 36 листов карты-картинки.
4) Определить вероятность выбора из колоды карт в 36 листов короля?
5) Определить вероятность выбора из колоды карт в 36 листов дамы черной масти.
6) Определить вероятность выбора из колоды карт в 36 листов бубнового туза.

Статистический подход
к определению вероятности события

Вероятность – это частота появления события в большом количестве испытаний.

W(A)=m\n

m - число опытов в которых событие А произошло,

n – общее число проведенных испытаний

Проводится множество испытаний и считается сколько раз в этих испытаниях произошло событие. Например, монетку бросают 1000 (**n**) раз и считают сколько раз выпал орел, пусть 489 раз (**m**). Тогда статистическая вероятность события:

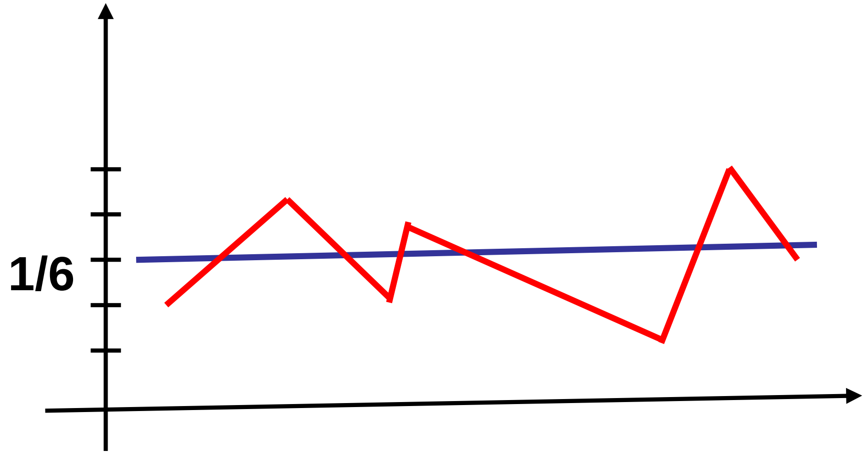
W(A)= 489 \1000=0,489.

Закон Больших чисел

Связь между частотой появления события и его вероятностью.

Закон больших чисел: при многократном повторении опыта частота события принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу.

Например: вероятность выпадения двух очков при бросании кубика равна 1/6. Выполнив некоторое количество серий бросаний можно убедиться, что частота появления четверки от серии к серии (при постоянном числе испытаний, в данном случае в каждой серии 100 испытаний) случайным образом колеблется около вероятности данного события, т.е. около P=1\6. При увеличении числа испытаний частота появления случайного события приближается к его вероятности. Это утверждение называется Законом Больших чисел.



Экспериментальное подтверждение закона Больших чисел

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений герба	Частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5080
К. Пирсон	12000	6014	0,5016
К. Пирсон	24000	12012	0,5006

Жорж Луи Леклерк Бюффон
(1707 – 1788)

Карл Пирсон
(1857 – 1936)

Аксиоматический подход к определению понятия вероятности

Колмогоров А.Н

Аксиоматический подход, на основе теории множеств, формализующий теорию вероятностей.

Задаются:

1) Понятия и определения
2) Аксиомы
3) Теоремы и их доказательства
4) Закономерности в виде формул и неравенств

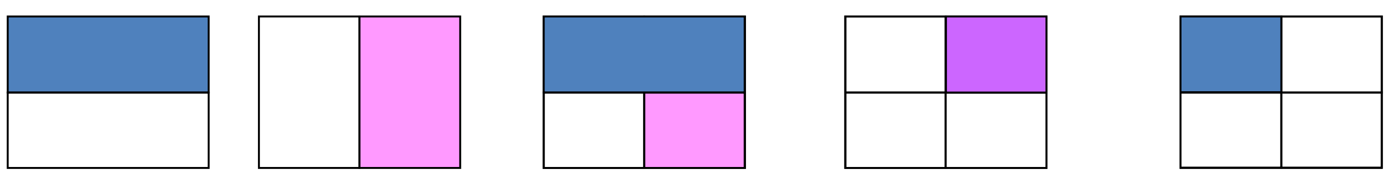
Чебышев П.Л.

Аксиоматический подход
Произведение, сумма и разность событий

1. Событие, состоящее в наступлении обоих событий А и В, будем называть **произведением** событий А и В и обозначать ***AB*** (или ***A***∩***B***).

2. Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А и В, будем называть **суммой** событий А и В и обозначать **А+В** (**АUB**).

3. Событие, состоящее в том, что событие А происходит, а событие В не происходит, будем называть **разностью** событий А и В и обозначать **А — В**.



A, B, A+B, A*B, A - B

Аксиоматический подход

1) Два события А и не А называются **противоположными**, если для них одновременно выполняются два соотношения:

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A * \bar{A} = 0$$

2) Два события А и В называются **несовместными**, если их совместное появление невозможно, то есть если

$$A*B = 0.$$

3) Два события А и В называются **совместными**, если их совместное появление случается,

то есть если $A*B \neq 0$.

Противоположные события

- **Противоположные события.** Два случайные события A и B называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу событий. Примеры: студент может сдать или не сдать экзамен, день и ночь.
- Конкретный результат испытания называется элементарным событием. Совокупность всех возможных, различных, конкретных исходов испытаний называется множеством элементарных событий.

Противоположные

День и ночь

Зима и лето

Совместные и несовместные события

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

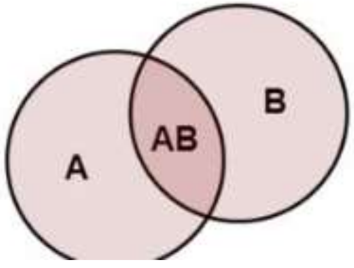
Два стрелка стреляют по мишени, два спортсмена одновременно бегут.

Случайные события А и В называются **несовместными**, если при данном испытании появление одного из них исключает появление другого события.

СОВМЕСТНЫЕ:

Наступило утро и взошло солнце

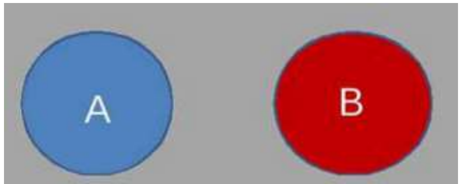
Человек идет и человек разговаривает

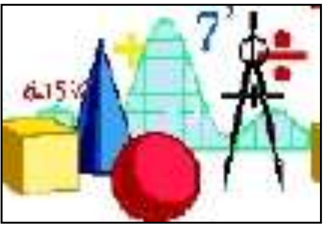


НЕСОВМЕСТНЫЕ:

Наступило утро и наступила ночь

Человек читает и человек спит





Аксиоматический подход
Сложное событие

Сложным событием называется произвольное подмножество множества элементарных событий.

Например, испытание – подбрасывание кубика.

Элементарное событие – выпадение грани с числом «5».

Сложное событие – выпадение грани с нечётным числом.

Сложному событию способствуют несколько элементарных.

Пример: Выпадение четного числа при подбрасывании кубика (событие А): Событию А способствуют события: A_2 – выпадет число 2 ; A_4 – выпадет число 4; A_6– выпадет число 6

Сложному событию А способствуют элементарные события A_2, A_4, A_6.

Полная группа событий

Полная группа событий – это совокупность единственно возможных событий при данном испытании.

События $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, ..., $\mathbf{B_N}$ образуют **полную группу событий,** если хотя бы одно из них непременно должно произойти (при каждом осуществлении комплекса условий Ω), то есть

$$\mathbf{B_1+B_2+\ldots+B_N = U}.$$

Пример. Студент может сдать экзамен на любую оценку. В данном случае возможны следующие события: студент может сдать экзамен на 5, студент может сдать экзамен на 4, студент может сдать экзамен на 3. Эти события образуют полную группу.

Примеры полной группы событий

Приобретены два билета денежно - вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий:

1. «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй»,
2. «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй»,
3. «выигрыш выпал на оба билета»,
4. «на оба билета выигрыш не выпал».

Эти события образуют **полную группу** попарно несовместных событий.

Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий:

попадание, промах.

Эти два несовместных события образуют полную группу.

Равновозможные события

Равновозможные события – это такие события, которые имеют одинаковые возможности для их появления.

Равновозможные

Равновозможные события

- домино «появление орла» и «появление решки» при одном бросании монеты.
- «появление 1 очка», «появление 2 очков», …,
- «появление 6 очков» при одном бросании игральной кости;
- «падение бутерброда маслом вверх» и «падение бутерброда «маслом вниз»;
- «изъятие из набора домино дубля» и «изъятие из набора костяшки с разными очками».

Зависимые и независимые события

Событие А называется **независимым** от события В, если вероятность появления события А не зависит от того произошло событие В или нет.

Пример. Два студента одновременно сдают экзамен независимо друг от друга. Это событие совместное и независимое.

Событие А называется зависимым от события В, если вероятность появления события А зависит от того произошло или не произошло событие В.

Пример. Работник получит оплату труда в зависимости от качества её выполнения.

Подходы к определению понятия вероятности

Количественной подход

Математическая вероятность - это количественная мера "степени уверенности" познающего объекта.

$$i=\log_2 1/P$$

Классический подход

Вероятность есть отношение числа благоприятных исходов испытания к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A)=m/n$$

Статистический подход

Вероятность –это частота появления события в большом количестве испытаний. $W(A)=m\backslash n$

(m - число опытов в которых событие А произошло, n – общее число проведенных испытаний)

Аксиоматический подход, на основе теории множеств, формализующий теорию вероятностей.

Аксиомы Колмогорова, задающие понятие вероятности

Аксиома 1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число **p(A),** называемое **вероятностью события** A.

Аксиома 2. Если события A_1, A_2, … попарно несовместны, то вероятность наступления хотя бы одного из них равна сумме вероятностей этих событий.

$$p(A_1+A_2+\ldots+A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots p(A_n)$$

Аксиома 3. $P(\Omega) = 1$. Вероятность полной группы событий равна 1.

Следствия из аксиом 1-3:

Следствие 1. **Вероятность достоверного события равна единице.**

$$P(A)=m/n=1$$

Действительно, если событие достоверно, то каждый исход испытания благоприятствует событию, то есть $m=n$, а значит и его вероятность

Следствие 2 . **Вероятность невозможного события равна нулю**.

$$P(A)=m/n=0$$

Раз ни один из исходов испытания не благоприятствует событию, то $m=0$, а тогда

Следствие 3. **Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и единицей.**

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Поскольку случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. То есть $0<m<n$, а значит $0< m/n<1$.

Классическое определение вероятности Р(А)

Пример 1. Брошены две игральные кости. (Кубики с нумерованными гранями). Найти вероятность, что сумма очков на выпавших гранях — четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. На выпавшей грани “первой” кости может появиться одно очко, два очка, …, шесть очков. Аналогичные шесть элементарных[1] исходов возможны при бросании “второй” кости. Каждый из исходов бросания “первой” кости может сочетаться с каждым из исходов бросания “второй”.

Таким образом, **общее число возможных элементарных исходов** испытания равно 6*6 = 36.

Эти исходы единственно возможны и, в силу симметрии костей, равновозможны. **Элементарное событие** - событие, которое не может быть разложено на составляющие события.

Решение задачи

Благоприятствующими интересующему нас событию (хотя бы на одной грани появится шестерка, сумма выпавших очков — четная) являются следующие пять исходов (первым записано число очков, выпавших на “первой” кости, вторым — число очков, выпавших на “второй” кости; далее — сумма очков):

6, 2; 6+2 = 8,

6, 4; 6 +4= 10,

6, 6; 6+6 = 12

2, 6; 2+6 = 8

4, 6; 4+6 = 10

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех исходов:

P(A) = 5/36.

Теорема сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей для совместных событий

Вероятность объединения произвольных событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теорема сложения вероятностей для несовместных событий

P(AB)=0 и тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В тех случаях, когда события А и В несовместны P(AB)=0, и соответственно **P(B/A)=0**.

Задача (*на теорему сложения вероятностей*)**:**

Пусть вероятность того, что студент получит на экзамене по статистике «пятерку» равна 0,17, «четверку» - 0.38, «тройку» - 0.32, а «двойку» - 013.

Найти вероятность того, что очередной студент получит оценку, не меньше тройки.

Решение. Искомое событие D произойдет, если будет получена оценка 5 (событие A), оценка 4 (событие B), или оценка 3 (событие C), то есть событие D есть сумма событий A, B, C. События A, B и C несовместимы. Поэтому, применяя теорему сложения вероятностей, получим:

$$P(D) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) =$$

$$0.17 + 0.38 + 0.32 = 0.87.$$

Решение задач

Вероятность того, что европейцы имеют группу крови A(I) равна 0,46, группу B(II) -0,34, группу AB(III) 0,15, группу 0(IV) - 0,05. Какова вероятность того, что у произвольно взятого донора группа крови будет A(I) или B(II)?

Решение: Пусть C - событие, что европейцы имеют группу крови A(I), D - событие, что европейцы имеют группу крови B(II). Эти события несовместны, так как не могут происходить одновременно с одними и теми же людьми. Поэтому можно применить теорему сложения для несовместных событий.

Искомая вероятность будет равна

P(C + D) = P(C) + P(D) = 0,46 + 0,34 = 0,80.

Группы крови	I (0)	II (A)	III (B)	IV (AB)
Агглютиногены в эритроцитах				

Задача (*на теорему сложения вероятностей для совместных событий*):

Два человека договорились встретится в условленном месте. Пусть вероятность того, что первый из них придет на встречу равна 0,7, а вероятность того, что придет второй равна - 0.3.

Найти вероятность того, что хотя бы один из них придет на встречу.

Решение. Искомое событие произойдет, если на встречу придет либо первый человек (событие ***А***) либо второй человек (событие ***В***), то есть нужно определить вероятность суммы этих событий. События ***А и В*** являются совместными. Поэтому, применим теорему сложения вероятностей для совместных событий:

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)} = 0.7 + 0.3 - 0.21 = 0.79.$$

Основные теоремы классической теории вероятностей

Теорема 1. Вероятность любого события не может быть отрицательной и больше единицы.

Теорема 2. Вероятность достоверного события равна единице.

Теорема 3. Вероятность невозможного события равна нулю.

Теорема 4. Вероятность суммы конечного числа несовместимых событий равна сумме их вероятностей. (Теорема сложения вероятностей).

$$\mathbf{P(A1+A2+\ldots+An) = P(A1) + P(A2) + \ldots + P(An).}$$

Следствие 1. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.

Следствие 2. Вероятность события, противоположного событию **A**, равна разности между единицей и вероятностью события **A**.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий

События А и В называются **независимыми**, если реализация одного из них никак не влияет на вероятность другого события. Например, вероятности поражения цели первым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события "первое орудие поразило цель" и "второе орудие поразило цель" независимы.

Если два события А и В независимы, и вероятность каждого из них известна, то вероятность одновременного наступления и события А, и события В (обозначается АВ) можно посчитать, воспользовавшись следующей теоремой:

Вероятность одновременного наступления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A\cdot B\cdot C) = p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)$$

Задача
(*на теорему умножения вероятностей для независимых событий)*

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий равны: $p_1=0,7$; $p_2=0,8$. Найти вероятность попадания при одном залпе обоими орудиями одновременно. *Решение:*

События А (попадание первого орудия) и В (попадание второго орудия) независимы, значит вероятность

$$P(AB)=P(A)*P(B)=p_1*p_2=0,56$$

Задача (*на теорему умножения вероятностей для независимых событий*):

Два человека договорились встретится в условленном месте. Пусть вероятность того, что первый из них придет на встречу равна 0,8, а вероятность того, что придет второй равна - 0.65.

Найти вероятность того, что эти люди встретятся.

Решение. Искомое событие произойдет, если на встречу придет первый человек (событие ***A***) и придет второй человек (событие ***B***), то есть нужно определить вероятность произведения этих событий. События ***A и B*** являются независимыми. Поэтому, применим теорему умножения вероятностей для независимых событий:

$$P(A*B) = P(A) * P(B) = 0.8 * 0.65 = 0.52.$$

Теорема умножения вероятностей для зависимых событий

Вероятность одновременного наступления двух зависимых событий равна произведению вероятности исходного события А и условной вероятности произойти событию В после того как событие А произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A)\, P(B/A)$$

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

P(H1)=1/3

P(H2)=2/3

P(A\H1)=0,6

P(A\H2)=0,8

Зависимые события:
чтобы сделать покупки,
надо зайти в магазин

Выбор магазина -исходное событие

осуществление покупок
- зависимое событие

Условная вероятность

Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место другое событие А, называется условной вероятностью события и обозначается

P(B\A)

Если требуется найти вероятность события *B* при условии, что произошло некоторое другое событие *A*, то такую ситуацию характеризуют с помощью условной вероятности.

Пример: пусть в корзине 3 красных и 5 желтых яблок. Из корзины по очереди вынимают 2 яблока и не возвращают назад. Определить вероятность, что оба вытащенных яблока оказались красными.

Решение: пусть А –событие, состоящее в том, что первым достали красное яблоко, тогда **P(A)=3/8;**

Пусть В – событие, состоящее в том, что вторым достали красное яблоко. А и В – зависимые события, так как А меняет вероятность В. Тогда **P(B\A)=2/7 –** условная вероятность, а требуется найти

P(A · B) = P(B) P(B\A) =3/8 · 2/7=6/56=3/28

Ответ: 3/28.

Задача (*на теорему умножения вероятностей для зависимых событий*):

В урне находится 2 белых и 6 черных шаров. Из урны поочередно вынимают два шара, причем после первого изъятия шар не возвращается в урну.

Найти вероятность того, того, что оба шара окажутся черными.

Решение. Событие ***А*** – появление черного шара при первом испытании, событие ***В*** – появление черного шара при втором испытании. Поскольку первый шар в урну не возвращается, то есть число шаров в урне уменьшается, что изменяет вероятность события В, значит эти события являются зависимыми.

Вероятность вытащить черный шар при первом испытании равна:

Р(А)=6/8=3/4.

Условная вероятность вытащить черный шар при втором испытании, при условии, что А наступило: **Р(В/А)** = 5/7.

Применим теорему умножения вероятностей для независимых событий:

Р(А*В) = Р(А) * Р(В/А) = 3/4 * 5/7 = 15/28.

Решение задач

Три стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель каждого стрелка равны 0,9; 0,8; 0,85 соответственно. Найти вероятность того, что в цель попадут только два стрелка. **Решение**. Искомое событие произойдет, если случатся такие события:

- попадут 1-ый и 2-ой стрелки, 3-ий промажет;
- попадут 1-ый и 3-ой стрелки, 2-ой промажет;
- попадут 2-ый и 3-ой стрелки, 1-ый промажет.

Решение: Попадания каждого стрелка в цель не зависят друг от друга, поэтому с помощью теоремы умножения вероятностей можно рассчитать все возможные исходы испытания А, В и С.

Вероятность события **А**: **Р(А)= Р(1*2*не3)= 0,9*0,8*0,15=0,108;**

вероятность события **В**: **Р(В)= Р(не 1*2*3)= 0,1*0,8*0,85=0, 068;**

вероятность события **С**: **Р(С)= Р(1*не 2*3)= 0,9*0,2*0,85=0, 153.**

События ***A***, ***B*** и ***C*** несовместимы. Тогда, применяя теорему сложения вероятностей, получим, что вероятность того, что в цель попадут два **стрелка**

Р(D)= Р(А)+ Р(В)+ Р(С)= 0,108+0, 068+0, 153=0,329.

Событие ***D*** есть сумма событий ***A, B, C***.

Формула полной вероятности

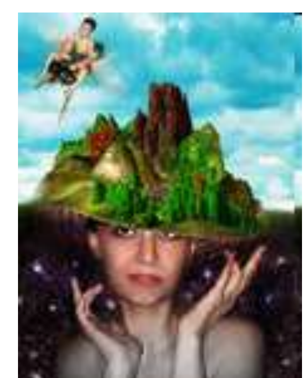
Предположим, что событие А может наступить только вместе с одним из нескольких попарно несовместных событий **H_1, H_2, ..., Hn.**

Так как заранее неизвестно, с каким из событий Hi произойдет событие А, то события Hi, называют гипотезами. Если событие А может наступить только вместе с одним из событий **H, H_2, ..., Hn,** образующих полную группу несовместных событий.

Вероятность события А равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Формула полной вероятности:

$$p(A) = p(A/H_1)p(H_1) + p(A/H_2)p(H_2) + \dots$$
$$+ p(A/H_n)p(H_n)$$



Формула полной вероятности Задача

Пример. Имеются три урны. В первой находятся 5 белых и 3 черных шара, во второй — 4 белых и 4 черных, в третьей — 8 белых. Наугад выбирается одна из урн и из нее вытаскивается один шар. Какова вероятность того, что он окажется черным (событие А)?

Решение

Шар может быть вытащен из первой урны, либо из второй, либо из третьей; обозначим эти события H_1, H_2, H_3. Так как имеются одинаковые шансы выбрать любую из урн, то

$p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = 1/3$

Далее находим вероятности события А при каждом из условий H_1, H_2, H_3:

$p(A/H_1) = 3/8$, $p(A/H_2) = 4/8$, $p(A/H_3) = 0/8$.

Отсюда:

$$p(A) = p(A/H_1)\,p(H_1) + p(A/H_2)\,p(H_2) + p(A/H_3)\,p(H_3) =$$

$$=(1/3)\cdot(3/8) + (1/3)\cdot(4/8) + (1/3)\cdot(0/8) = 7/24.$$

Формула Томаса Байеса

Проверяет вероятность гипотезы

Формула священника и математика **Томаса Байеса** двухсотлетней давности. Были проведены исследования и сделаны расчеты в нескольких направлениях. Среди них — возникновение и устройство космоса, эволюция, добро и зло, религиозные сведения — на многие трудные вопросы должен был быть найден математический ответ.

Для начала ученые выдвинули гипотезу, что Бог существует. В ходе исследования были поставлены следующие вопросы: насколько велика вероятность того, что Бог создал Вселенную? Насколько велика вероятность того, что эволюция на Земле произошла при его участии? Насколько велика вероятность того, что добро немыслимо без Бога? Любой утвердительный ответ говорил в пользу Бога, а объяснение, не связанное с ним — в пользу Его отсутствия.

В результате было установлено: Бог существует с вероятностью 62 %

Формула Байеса

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i)\, p(A / H_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(H_j)\, p(A / H_j)}$$

Пусть произведен опыт, и в результате него наступило событие А. Сам по себе этот факт еще не позволяет сказать, какое из событий H_1, H_2, …, H_n имело место в проделанном опыте. Поставим задачу: найти вероятности **p(Hi/A)** каждой из гипотез в предположении что наступило событие А. Эта задача решается при помощи формулы Байеса.

В примере из предыдущего раздела вероятность гипотезы Н3 — шар извлечен из третьей урны — до того, как произведен опыт, равнялась 1/3. Однако, если опыт произведен и наступило событие А — вытащенный шар оказался черным, то это снижает шансы гипотезы Н3 до нуля. Послеопытная, “апостериорная” вероятность гипотезы Н3 будет в данном случае ниже, чем доопытная, “априорная”.

Задача на формулу Байеса

Пример. Два станка производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого станка вдвое больше производительности второго. Первый станок производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым станком.

Решение

Обозначим через ***A*** событие — деталь отличного качества.

Можно сделать два предположения (гипотезы):

$\mathbf{H_1}$ — деталь произведена первым станком, причем (поскольку первый станок производит вдвое больше деталей, чем второй)

$\mathbf{P(H_1) = 2/3;}$

$\mathbf{H_2}$ - деталь произведена вторым станком, приче

$\mathbf{P(H_2) = 1/3.}$

Задача на формулу Байеса

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым станком :

$$P(A/H_1) = 0.6.$$

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым станком :

$$P(A/H_2) = 0.84.$$

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = 0.68.$$

Искомая вероятность того, что взятая кач. деталь произведена первым станком, по формуле Байеса равна:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}}{0.68} = \frac{10}{17}$$

Задача на формулу Байеса

Пример. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы:

- на линию огня вызван первый стрелок,
- на линию огня вызван второй стрелок,
- на линию огня вызван третий стрелок.

Задача на формулу Байеса

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$.

В результате опыта наблюдалось событие В - после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

$$P(B\mid A_1)=0,7\cdot 0,7=0,49;$$
$$P(B\mid A_2)=0,5\cdot 0,5=0,25;$$
$$P(B\mid A_3)=0,2\cdot 0,2=0,04.$$

по формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A_1\mid B)=\frac{0,49\cdot 1/3}{1/3\cdot 0,49+1/3\cdot 0,25+1/3\cdot 0,04}=\frac{0,49}{0,78}=0,628.$$