Алгебра логики

1. История логики
2. Высказывания
3. Логические операции
4. Истинностные таблицы
5. Упрощение выражений
6. Логические парадоксы
7. Предикаты и кванторы
8. Решение логических задач

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

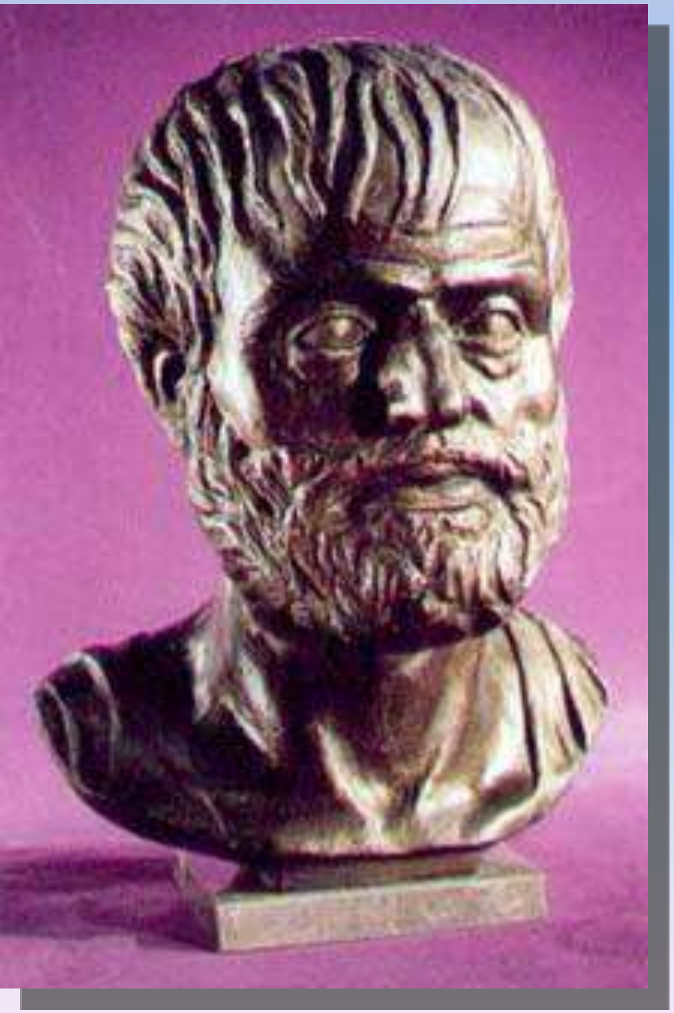
Логика –наука, изучающая законы и формы мышления.

Логика изучает:

- Формы мышления
- Способы мышления

Суть мышления не важна

Историческая справка



1 этап – появление формальной логики

Основатель – Аристотель
384 -322 гг. до н.э.

Аристотель пытался найти ответ на вопрос «как мы рассуждаем», изучал правила мышления. Он впервые дал систематическое изложение логики.

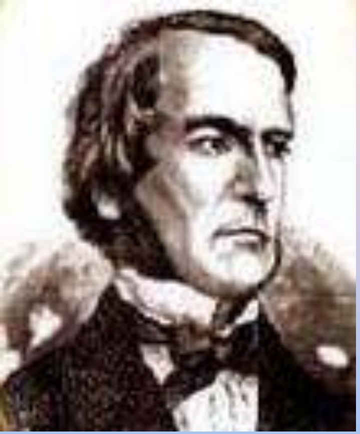
Аристотель анализировал человеческое мышление, его формы - понятие, суждение, умозаключение, и рассмотрел со стороны строения, структуры, то есть с формальной стороны. Так возникла формальная логика - наука пытавшаяся найти ответ на вопрос, как мы рассуждаем, изучающая логические операции и правила мышления.

Готфрид Вильгельм Лейбниц 1642 -1716

2 этап – математическая логика

Основатель – немецкий математик Лейбниц, предпринял попытку логических вычислений.

В своей работе «Искусство составления комбинаций» он заложил основы общего метода, который позволяет свести мысли человека к совершенно точным формальным высказываниям. Так открылась возможность перевести логику из словесного царства в царство математики. У Лейбница и возникла мысль, что двоичная система может стать универсальным логическим языком.



Алгебра высказываний
создал Джордж Буль
(Булева алгебра)

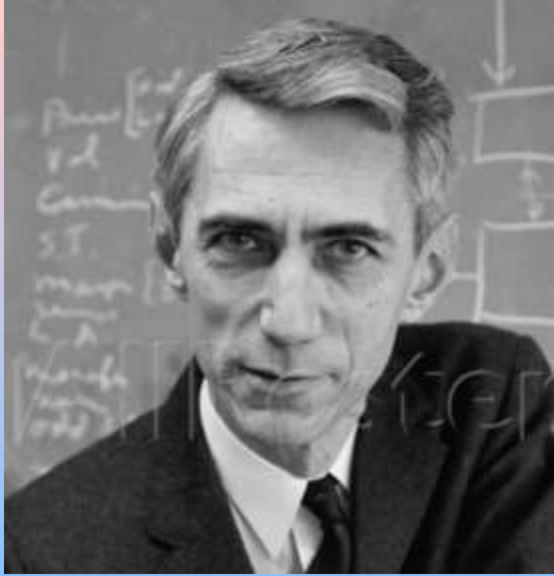
Алфавит, орфография и грамматика для мат. логики.

Буль изобрел своеобразную алгебру - систему обозначений и правил, применимую ко всевозможным объектам, от чисел и букв до предложений. Пользуясь этой системой, он мог закодировать высказывания истинность которых требовалось доказать с помощью символов своего языка, а затем манипулировать ими так, как в математике манипулируют числами. Основными операциями булевой алгебры являются конъюнкция (И), дизъюнкция (ИЛИ) и отрицание (НЕ). Его книга

«Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей». 1854 год

История возникновения логики

Клод Шеннон 1916-2001

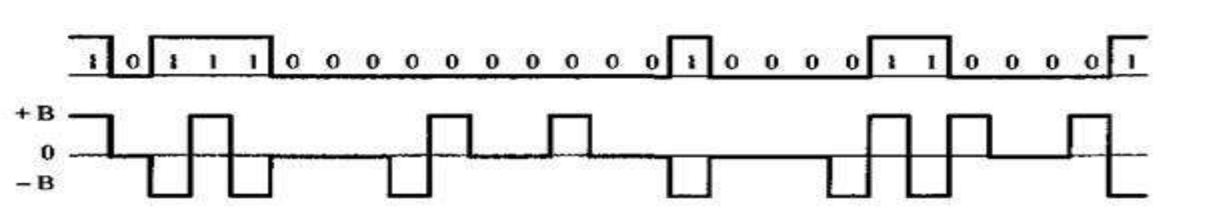


Лишь в 1938 году выдающийся американский математик и инженер Клод Шеннон обнаружил, что алгебра логики применима к любым переменным, которые могут принимать только два значения.

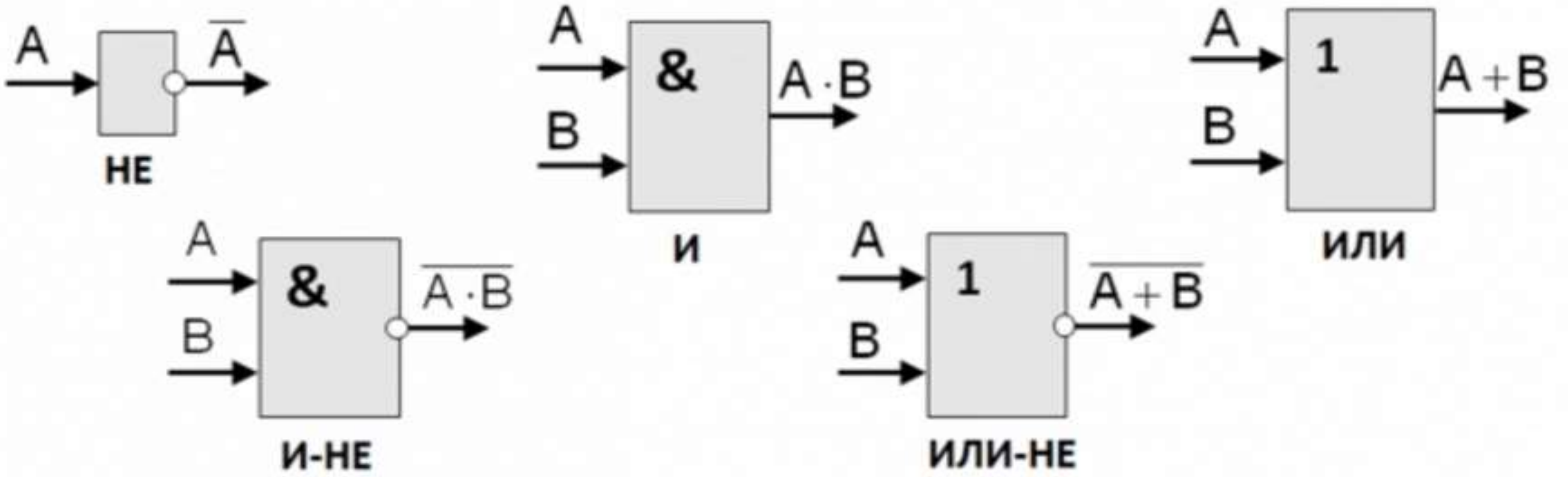
Например, к состоянию контактов: включено - выключено или напряжению (или току): есть - нет, которыми представляется информация в ЭВМ.

Математической основой цифровой электроники и вычислительной техники является алгебра логики.

Современные универсальные вычислительные машины являются **логическими машинами**. Именно введение логических операций сделало их такими гибкими; они же позволяют моделировать рассуждения.



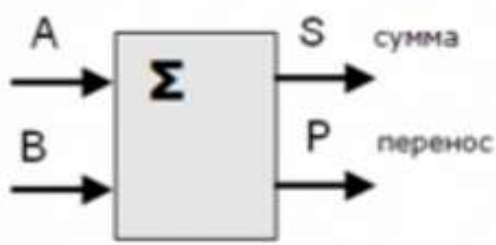
Логические элементы компьютера

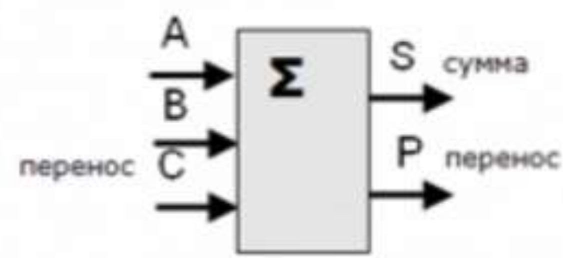


Триггер – это логическая схема, способная хранить 1 бит информации (1 или 0). Строится на 2-х элементах **ИЛИ-НЕ** или на 2-х элементах **И-НЕ.**

Полусумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа.

Сумматор – это логическая схема способная складывать два одноразрядных двоичных числа с переносом из предыдущего разряда.





Алгебра логики и двоичное кодирование

Алгебра логики - это раздел математики, изучающий логические переменные с точки зрения их истинности или ложности и логических операций над ними.

Математический аппарат алгебры логики удобен для описания того, как функционируют аппаратные средства компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, а значений логических переменных тоже два: “1” и “0”.

Из этого следует два вывода:

- одни и те же устройства компьютера могут применяться для обработки и хранения как числовой информации, представленной в двоичной системе счисления, так и логических переменных;
- на этапе конструирования аппаратных средств алгебра логики позволяет упростить логические функции, описывающие работу схем компьютера, и уменьшить число логических элементов, из десятков тысяч которых состоят основные узлы компьютера.

Элементы математической логики

По содержанию человеческое мышление бесконечно многообразно, но форм, в которых выражается это разнообразие, совсем немного!

Рассмотрим высказывания:

1) Все караси – это рыбы; Все треугольники – это геометрические фигуры; Все стулья – это предметы мебели.

Все А – это В, где А и В – какие-либо объекты.

2) Если наступает осень, то опадают листья; Если завтра пройдет дождь, то на улице будут лужи; Если вещество – металл, то оно электропроводно.
Если А, то В.

Логика не интересуется содержанием мышления, она изучает только формы мышления; ее интересует не то, что мы мыслим, а то, как мы мыслим, поэтому она часто называется **формальной логикой**.

ВЫСКАЗЫВАНИЕ

Высказывание - это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных объектов и отношениях между ними.

- Высказывание может быть либо **истинным, либо ложным.**
- Высказывание **не может быть** выражено повелительным или вопросительным предложением, т. к. оценка их истинности или ложности невозможна.

Элементы математической логики

Высказывание – любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.

Символическое обозначения высказываний – латинские буквы *A*, *B*, *C*, ..., *X*, *Y*, *Z*, ...

Логическое значение высказывания «истина»(«ложь») обозначается или буквой «и», («л»), или цифрой 1, (0).

A = 1, B = 0, X = «и», Y = «л»

Алгебра высказываний

- Высказывания могут быть ***простыми*** или ***составными***.
- 2+2=4 – это пример простого высказывания.
- **Простое высказывание содержит одну простую мысль**.
- **Составные высказывания состоят из простых высказываний и логических операций.**
- *“На улице солнечно* **и** *у меня хорошее настроение.”* **–** это пример составного высказывания.
- **Алгебра высказываний определяет истинность или ложность составных высказываний.**

Алгебра высказываний

Математический аппарат логики:

- Вместо простых высказываний вводятся логические переменные: А, В, С…

- Значения высказываний обозначаются следующим образом:
  - истина- **1**
  - ложь- **0**.

Высказывания или нет

Объясните, почему следующие предложения не являются высказываниями:

1. Какого цвета твой велосипед?
2. Число X больше пяти?
3. 5X-2
4. Посмотрите в окно.
5. Пейте томатный сок!
6. Вы были в музее?
7. Разность чисел 12 и X равна 6.

Какие из следующих высказываний являются истинными, а какие ложными?

1. Город Москва – столица России.
2. Число 12 – простое.
3. 7*3=1.
4. 12<15.
5. Сканер – устройство, которое может напечатать на бумаге то, что изображено на экране компьютера.
6. Клавиатура – устройство ввода информации.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

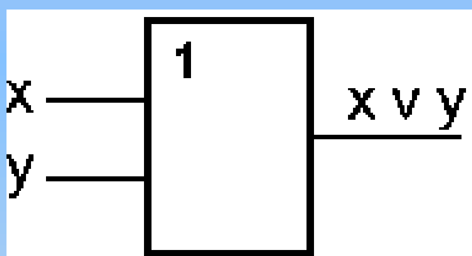
Название	Обозначение	Математическое обозначение
Логическое умножение, конъюнкция	и	$\&, \cdot, \wedge, \cap$
Логическое сложение, дизъюнкция	или	$+, \vee, \cup$
Логическое отрицание	не	$\overline{\ }, \neg$
Импликация, следование	если, то	$\rightarrow, \Rightarrow$
Эквивалентность, равносильность	тогда и только тогда	$\equiv \Leftrightarrow, \leftrightarrow, \sim$

Логические операции

Логическое сложение ∨ (дизъюнкция)

Дизъюнкция двух или более логических значений

Обозначается так:
A+B, A ∨ B,
A or B, A или B



A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

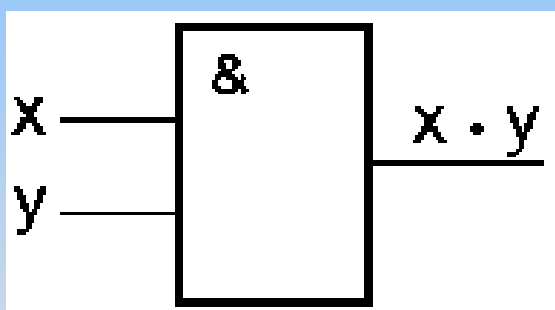
Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.

Таблица истинности логического выражения – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения для каждой комбинации.

Логическое умножение (конъюнкция) ∧ &

Обозначается так:
A·B, A ∧ B,
A and B

Конъюнкцию двух или более логических значений A ∧ B



A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание "**А и В**" истинно тогда и только тогда, когда **А** и **В** истинны одновременно.

Логическое отрицание (инверсия) not A $\overline{A}$

Если высказывание **A** истинно, то "**не A**" ложно, и наоборот.

Инверсия или отрицание

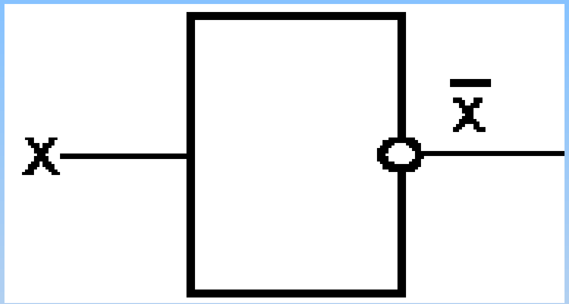


Таблица истинности для отрицания

A	не A
0	1
1	0

Например для высказывания

«Волга впадает в Балтийское море» отрицанием будет высказывание: «Неверно, что Волга впадает в Балтийское море» или

«Волга не впадает в Балтийское море», а двойным отрицанием будет высказывание: «Неверно, что Волга не впадает в Балтийское море».

Импликация

Обозначение: **A → B** Логическая связка «ЕСЛИ..., ТО» (логическое следование одного высказывания из другого)

Импликация A→B истинна всегда, за исключением случая, когда A истинно, а B ложно.

Определение через основные функции:

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность **A↔B**

«тогда и только тогда, когда»

Логическое равенство X≡Y или **A↔B**

Эквивалентность — это выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда обе части выражения имеют одинаковое значение, например, 1 ≡ 1 (0 ≡ 0)

$$X \leftrightarrow Y = X \cdot Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

A	B	A ≡ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A ↔ B

A: Число является четным

B: Число делится без остатка на 2

Неравнозначность $\mathbf{X \oplus Y}$

Логическая неравнозначность — это функция, которая дает истину тогда и только тогда, когда обе части логического выражения имеют разные значения 0 и 1, 1 и 0.

Можно обозначить ее знаком ≠

$$X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$$

A	**B**	**A ⊕ B**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Основные законы алгебры логики

1.	AvA =A A&A = A	A+A =A A·A = A	Правило идемпотентности
2	A v B=B vA A&B=B&A	A+B=B+A A·B=B·A	Правило коммутативности
3	(AvB) vC =Av(BvC) (A&B)&C =A&(B&C)	(A+B)+C=A+(B+C) (A·B)·C = A·(B·C)	Правило ассоциативности
4	(A&B) v (A&C) = A&(B vC) (A v C) & (BvC) = (A & B) vC	(A·B) +(A·C) = A·(B+C) (A+C) ·(B+C)= (A ·B)+C …	Правило дистрибутивности
5	$\overline{A\&B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ $\overline{A \vee B} = \bar{A}\&\bar{B}$	$\overline{A+B} = \bar{A}\cdot\bar{B}$ $\overline{A\cdot C} = \bar{A}+\bar{C}$	Закон де Моргана
6	Закон двойного отрицания $\bar{\bar{A}}=A$	$A \wedge \bar{A}=0$	$A \wedge 1=A$ $\quad$ $A \vee 1=1$

Как упрощаются функции

Эквивалентность

$$X \leftrightarrow Y = X \cdot Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

Неравнозначность

$$X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$$

Импликация

$A \rightarrow B = \bar{A} + B$

Закон поглощения:

$A + \bar{A}B = A + B$

$\bar{A} + AB = \bar{A} + B$

Упрощение выражений с помощью логических законов

Упростите выражение

$$(A \vee B \vee C) \wedge \overline{A \vee \overline{B} \vee C} =$$

Согласно закону общей инверсии для логического сложения (первому закону Моргана) и закону двойного отрицания:

$$= (A \vee B \vee C) \wedge \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} =$$

Согласно распределительному (дистрибутивному) закону для логического сложения:

$$= \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$$

Упрощение выражений

$AB \to (A + (B \leftrightarrow C))$	$(\overline{A \leftrightarrow C) + B} \to \overline{BC})$	$(a \to c)\overline{a \oplus (b \vee c)}$
$(A \leftrightarrow C) \to (C + (\overline{A + B}))$	$(A \oplus B) \vee (A \to (C \to B))$	$\overline{(a \leftrightarrow b) \to ((a \to b) \vee c}$
$(B \leftrightarrow C) \to (C + \overline{AB})$	$(A \to C) \vee (\overline{A \vee B} \to C)$	$\overline{(a \oplus b) \to ((c \to b) \vee c}$

Упрощение выражений

5. Дано *выражение*: $(x \vee \overline{x \vee y}) \wedge (y \vee \overline{x \wedge \overline{y}})$. Упростить эту *функцию* и построить таблицу истинности для полученной после *упрощения функции*. Указание: использовать аксиому де Моргана два раза.
6. Дано *выражение*: $((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x \vee y})) \wedge (\overline{y} \vee x \wedge (y \vee \overline{x}) \vee \overline{x \wedge \overline{y}})$. Упростить эту *функцию* и построить таблицу истинности для полученной после *упрощения функции*. Указание: в первой из перемножаемых скобок слагаемые равны.
7. Подобрать две *функции*, эквивалентные данной функции, но с меньшим числом операций и операндов:
   $z = \overline{x \vee y \wedge \overline{y \wedge x \vee x}}$. Указание: под внутренним знаком *отрицания* применить аксиому поглощения.
8. Из указанных ниже *функций* отметить (с обоснованием) эквивалентные между собой *функции*:
   - $z = \overline{x} \vee \overline{x \wedge y \vee x} \wedge y$;
   - $u = \overline{x \vee y} \vee \overline{y \vee x} \wedge y$
   - $s = \overline{y \vee x \wedge y}$.

   Указание: упростить и сравнить.
9. Из указанных ниже *функций* отметьте (с обоснованием) эквивалентные между собой *функции*:
   - $z = \overline{x \wedge y \vee x \vee y} \wedge y$;
   - $u = (\overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{\overline{y} \vee x}) \wedge y$;
   - $w = (\overline{x \vee y} \vee \overline{x \wedge y}) \wedge y$;
   - $s = \overline{y \vee x \wedge y} \wedge (y \vee \overline{x \wedge y})$;
   - $v = \overline{x \vee \overline{x \vee y}} \vee (y \vee \overline{x \wedge y} \wedge y)$.

Использование таблиц истинности

Алгоритм построения таблицы:

1) Записать в таблицу имена все переменных, входящих в выражение или в функцию;
2) Внести в таблицу все возможные комбинации этих значений от 000 до 111 (количество строк в таблице определяется как 2^n , где n – это количество переменных в выражении);
3) Добавить в таблицу колонки, описывающие каждую операцию вплоть до результата;
4) Последовательно заполнить таблицу.

Число строк в таблице можно определить если число переменных в выражении возвести в квадрат

$$F(A,B,C) = A \cup (\overline{C} \cap B)$$

A	B	C	$\overline{C}$	$\overline{C} \cap B$	$A \cup (\overline{C} \cap B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Составление таблицы истинности

$$\overline{x} \vee y \to x \wedge \overline{y}$$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee y$	$x \wedge \overline{y}$	$\overline{x} \vee y \to x \wedge \overline{y}$
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**

Табличный метод решения логических задач

Табличный метод решения логических задач весьма удобен при установлении истинности одного из нескольких высказываний, сделанных участниками задачи и содержащих описание их действий.

Решение логических задач

Задача 1. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты договора, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: "Чей именно проект был принят?", министры дали такие ответы:

Россия — "Проект не наш (1), проект не США (2)";
США — "Проект не России (1), проект Китая (2)";
Китай — "Проект не наш (1), проект России (2)".

Один из них оба раза говорил правду; второй – оба раза говорил неправду, третий один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Кто что сказал?

проект США (?)

	(1)	(2)
Россия	+	–
США	+	–
Китай		

проект Китая (?)

	(1)	(2)
Россия	+	+
США	+	+
Китай		

проект России (?)

	(1)	(2)
Россия	–	+
США	–	–
Китай	+	+

Табличный метод

Задача 2. Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что

- Даша живет не в Париже, а Лариса – не в Ростове,
- парижанка – не актриса,
- в Ростове живет певица,
- Лариса – не балерина.

- Много вариантов.
- Есть точные данные.

Париж	Ростов	Москва		Певица	Балерина	Актриса
0	1	0	Даша	1	0	0
1	0	0	Анфиса	0	1	0
0	0	1	Лариса	0	0	1

! **В каждой строке и в каждом столбце может быть только одна единица!**

Задачи ЕГЭ (7)

На одной улице стоят в ряд 4 дома, в каждом из них живет по одному человеку. Их зовут Василий, Семен, Геннадий и Иван. Известно, что все они имеют разные профессии: скрипач, столяр, охотник и врач. Известно, что

(1) Столяр живет правее охотника.

(2) Врач живет левее охотника.

(3) Скрипач живет с краю.

(4) Скрипач живет рядом с врачом.

(5) Семен не скрипач и не живет рядом со скрипачом.

(6) Иван живет рядом с охотником.

(7) Василий живет правее врача.

(8) Василий живет через дом от Ивана.

Определите, кто где живет, и запишите начальные буквы имен жильцов всех домов слева направо. Например, если бы в домах жили (слева направо) Кирилл, Олег, Мефодий и Пафнутий, ответ был бы КОМП.

Решение задачи

(1) Столяр живет правее охотника.

(2) Врач живет левее охотника.

(3) Скрипач живет с краю.

(4) Скрипач живет рядом с врачом.

(5) Семен не скрипач и не живет рядом со скрипачом.

(6) Иван живет рядом с охотником.

(7) Василий живет правее врача.

(8) Василий живет через дом от Ивана.

скрипач	*столяр*	*охотник*	*врач*		1 дом	2 дом	3 дом	4 дом
0	0	1	0	*Василий*	0	0	1	0
0	1	0	0	*Семен*	0	0	0	1
1	0	0	0	*Гена*	1	0	0	0
0	0	0	1	*Иван*	0	1	0	0

Метод рассуждений

Задача 1. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты договора, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: «Чей именно проект был принят?», министры дали такие ответы:

Россия — «Проект не наш (1), проект не США (2)»;
США — «Проект не России (1), проект Китая (2)»;
Китай — «Проект не наш (1), проект России (2)».

Один из них оба раза говорил правду; второй – оба раза говорил неправду, третий один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Кто что сказал?

проект США (?)

	(1)	(2)
Россия	+	–
США	+	–
Китай		

проект Китая (?)

	(1)	(2)
Россия	+	+
США	+	+
Китай		

проект России (?)

	(1)	(2)
Россия	–	+
США	–	–
Китай	+	+

Использование алгебры логики

Задача 4. На вопрос «Кто из твоих учеников изучал логику?» учитель ответил: «Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис. Однако неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис». Кто же изучал логику?

Решение: **A –** логику изучал Андрей, **B –** Борис, **C –** Семен

«Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис».

$$A \to B = 1$$

«Неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис».

$$C \to B = 0 \qquad \overline{C \to B} = 1$$

1 способ:

$$(A \to B) \cdot (\overline{C \to B}) = 1$$

$$(\overline{A} + B) \cdot (\overline{\overline{C} + B}) = 1$$

$$(\overline{A} + \cancel{B}) \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

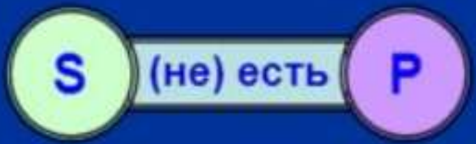
$$\overline{A} \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

$$A = 0$$
$$B = 0$$
$$C = 1$$

Логика Аристотеля
Формы мышления

Формы мышления
Суждение

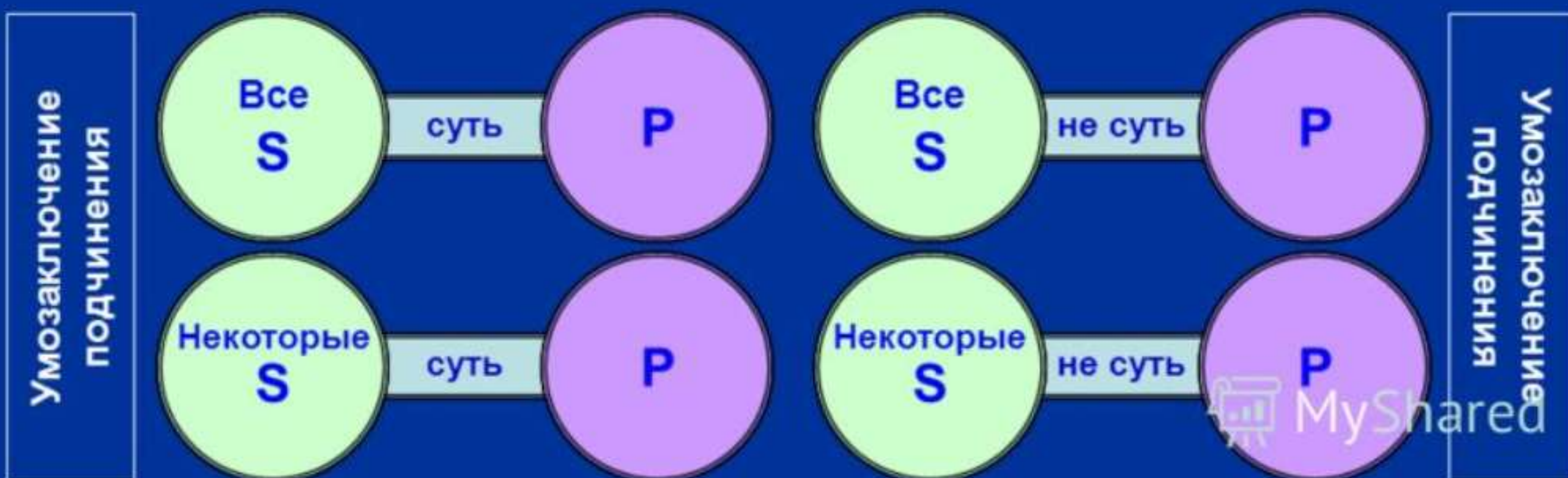
- Суждение – это такая форма мысли, в которой утверждается или отрицается что-либо относительно предметов и явлений, их свойств, связей и отношений.
- Элементарное суждение можно представить в виде формулы:



- Суждение выражает либо истину, либо ложь.

Формы мышления
Умозаключение

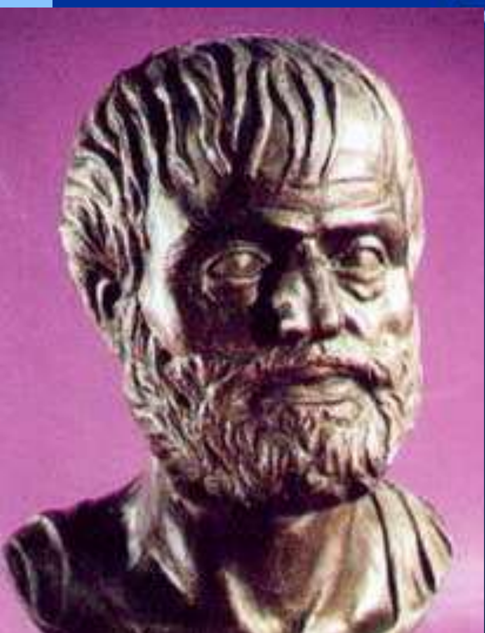
- Эти подразделения важны для уяснения следующей формы мышления – умозаключения.
- Умозаключение – это такое логическое действие, в результате которого из одного или нескольких – определённым образом связанных – суждений (именуемых **посылками**) получается новое суждение **(вывод)**, в котором содержится новое знание.
- Элементарное умозаключение исходит из одной посылки (такое умозаключение называется **непосредственным**).



http://www.myshared.ru/slide/197543/

Учение об умозаключении
Силлогизм

- Главной своей заслугой в логике Аристотель считал разработку учения о силлогизме.



Силлогизм

(*греч.* συλλογισμός) – разновидность умозаключения, посредством которого устанавливается логическое отношение между двумя понятиями на основании их отношения к некоему третьему понятию.

Силлогизм

Силлогизм (syllogismos) – это умозаключение или вывод, в котором из двух суждений, называемых посылками, получается третье суждение, называемое выводом.

Простой категорический силлогизм – это одно из наиболее часто встречающихся умозаключений. Он состоит из двух посылок. В первой посылке говорится об отношении терминов P и M, во второй – об отношениях терминов M и S. На основании этого делается вывод об отношении терминов P и S. Такой вывод возможен потому, что обе посылки содержат общий термин M, который опосредует отношение между терминами P и S.

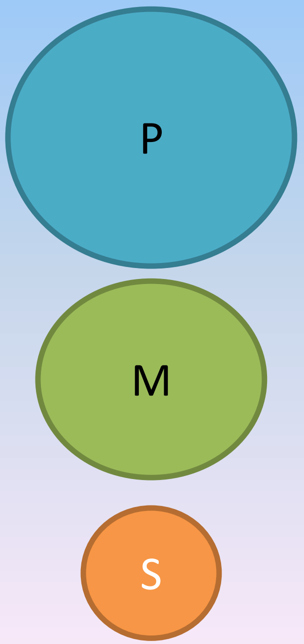
В составе силлогизма имеются две посылки и заключение.

Пример:

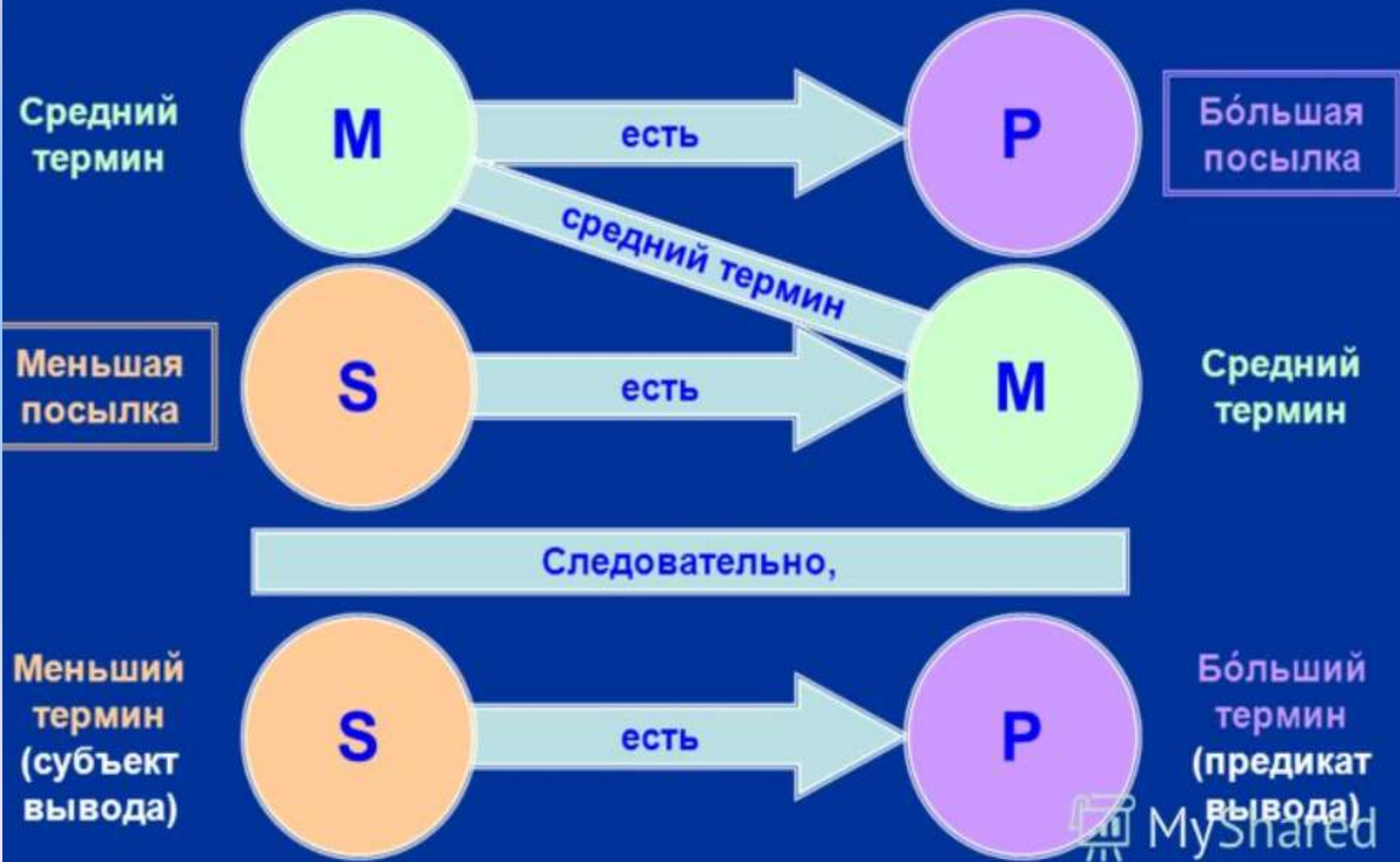
1) Все млекопитающие **M** имеют скелет **P**.

2) Все киты **S**– млекопитающие **M**.

3) Вывод: следовательно, все киты **S** имеют скелет **P**

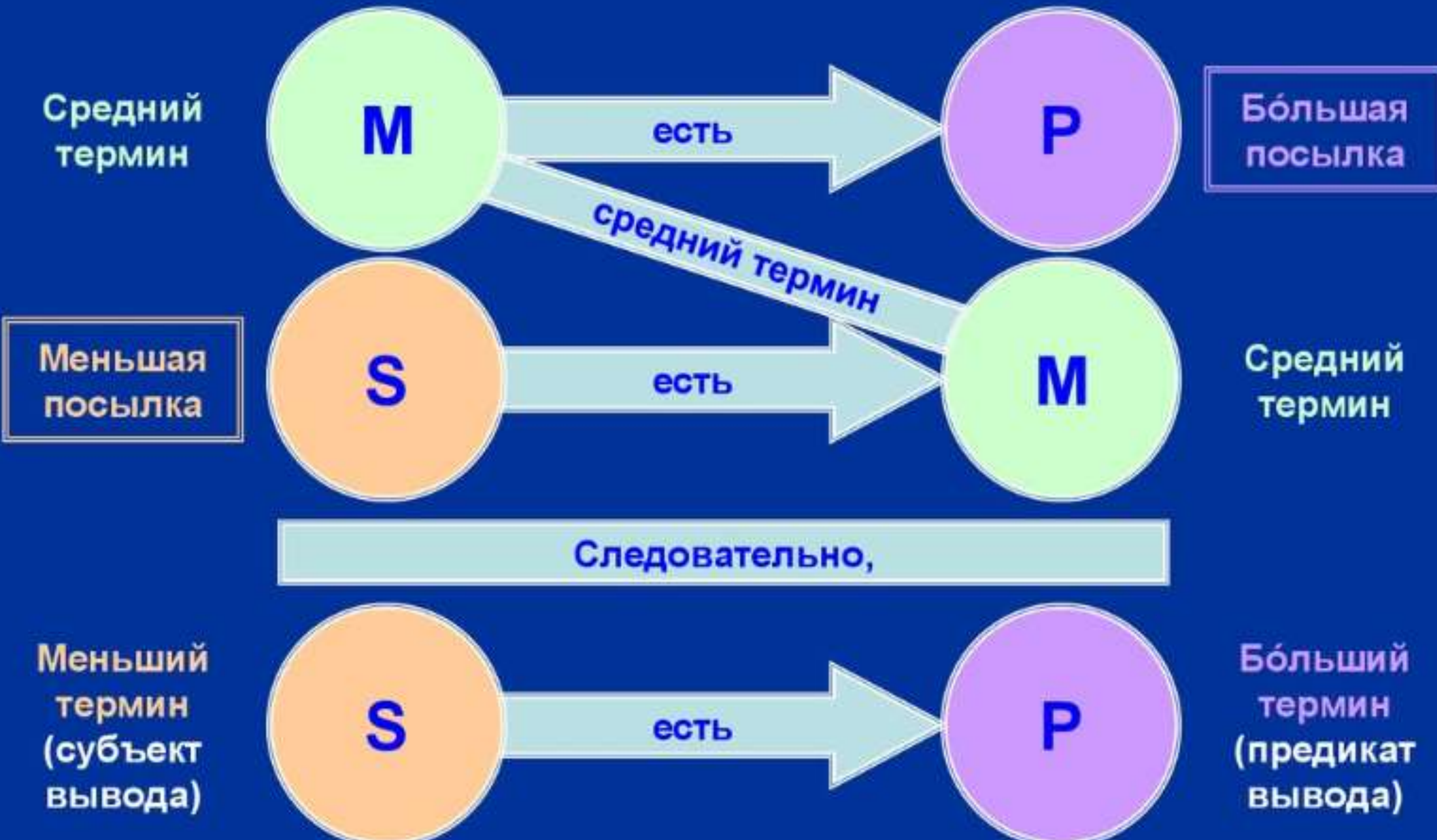


Учение об умозаключении
Силлогизм



Простой категорический силлогизм

Структура простого категорического силлогизма



Отношения между субъектом и предикатом

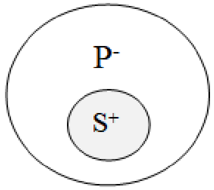
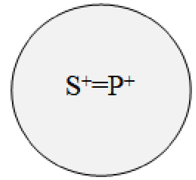
Между субъектом и предикатом могут быть различные отношения: равнозначность, пересечение, подчинение, несовместимость. Эти отношения имеют такой же смысл, как и в логике. Рассмотрим их подробнее в таблице.

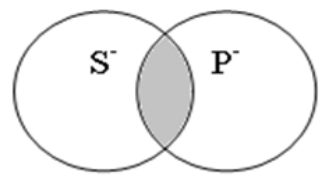
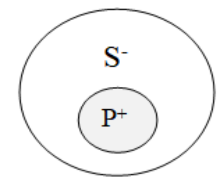
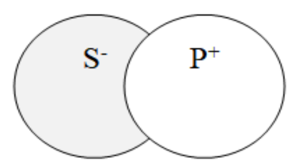
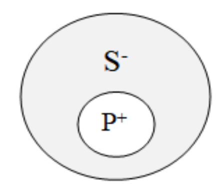
Существует 4 вида суждений: утвердительные – А (все), I (некоторые); отрицательные – Е,О.

Распределенность терминов в суждениях

Термины	Субъект распределен в общих суждениях		Субъект нераспределен в частных суждениях	
	A	E	I	O
S	+	+	-	-
P	±	+	±	+

Виды суждений и их представление

Вид суждения	Графическое представление	
Общие A утвердительное	 Пример: все процессоры (S^+) обрабатывают информацию (P^-).	 Пример равнозначности: все материалисты (и только они) (S^+) признают первичность материи (P^+).
E отрицательное	 Пример: ни один невиновный не должен сидеть в тюрьме	

Частные I утвердительное	 Пример пересечения: некоторые студенты (S) являются первокурсниками (P).	 Некоторые ученые S являются докторами наук P.
O отрицательное	 Некоторые студенты S^- не сдали экзамен по математике P^+.	 Некоторые теплые дни S^- не являются солнечными P^+.

Отношения между объемами понятий и основные типы суждений

- **Общеутвердительное суждение: А**

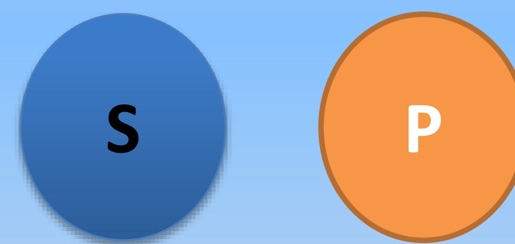
  Все S есть P

  Все студенты- молодые люди

- **Общеотрицательное суждение: Е**

  Ни одно S не есть P

  Ни один подложный документ не является доказательством

- **Частноутвердительное суждение: I**

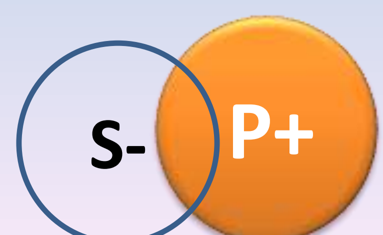
  Некоторые S есть P

  Некоторые писатели - фантасты

- **Частноотрицательное суждение: О**

  Некоторые S- есть не есть P+

  Некоторые европейские страны не являются членами НАТО

Примеры силлогизмов

1) Все кенгуру (М) есть сумчатые млекопитающие (Р) - большая посылка.

2) Это животное (S) есть кенгуру (М) - меньшая посылка.

3) Вывод: это животное (S) есть сумчатое млекопитающее (Р)- вывод. **А**

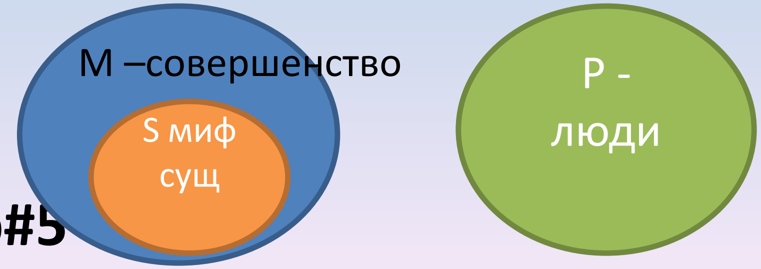
****

Ни один человек не совершенен.

Все совершенные существа мифические.

Все мифические существа не люди.

Е



https://4brain.ru/logika/sillogizmy.php#5

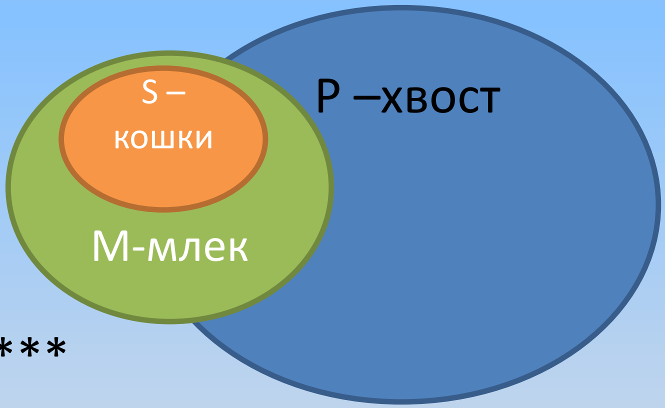
Примеры силлогизмов

1) Все кенгуру (M) есть сумчатые млекопитающие (P) - большая посылка.

2) Это животное (S) есть кенгуру (M) - меньшая посылка.

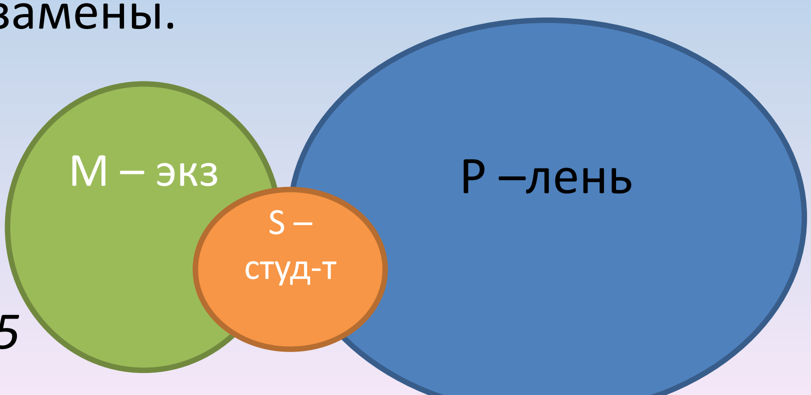
3) Вывод: это животное (S) есть сумчатое млекопитающее (P)- вывод.
****

Некоторые кошки бесхвосты.
Все кошки — млекопитающие.
Некоторые млекопитающие бесхвосты.
O



****

Ни один ленивый человек не сдаёт экзамены.
Некоторые студенты сдают экзамены.
Некоторые студенты ленивы.
I



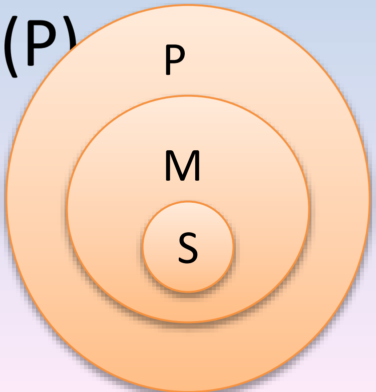
https://4brain.ru/logika/sillogizmy.php#5

Задание: сделайте полный разбор силлогизма

Укажите заключение и посылки, средний, меньший и больший термины, меньшую и большую посылки.

ПРИМЕР.

1) Каждый гражданин Российской Федерации (М) имеет право на образование (Р) - большая посылка.
2) Новиков (S) - гражданин Российской Федерации (М) - меньшая посылка.
3) Новиков (S) имеет право на образование (Р) заключение.

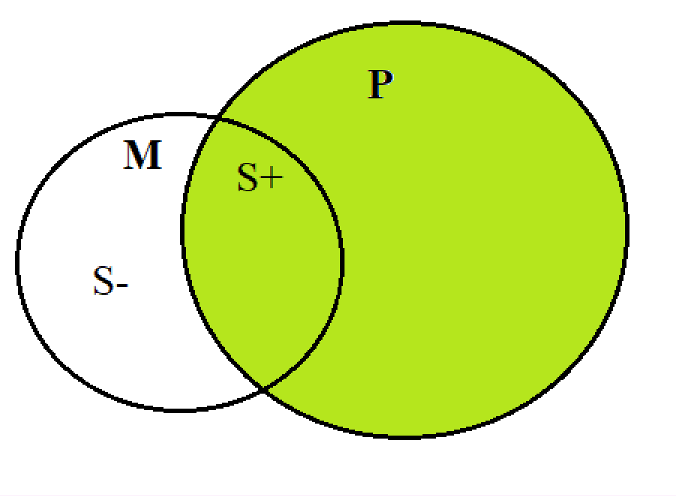


Задание: сделайте полный разбор силлогизма

Укажите заключение и посылки, средний, меньший и больший термины, меньшую и большую посылки.

1) Ни одна захватническая война не может быть справедливой
2) Освободительные войны являются справедливыми
3) Поэтому ни одна из освободительных войн не может быть захватнической.

Термины: Справедливость (P) большой термин
Война (M) - меньший термин
Освободительная S+
и захватническая война (S-) – меньшие термины.
1 и 2 посылки, 3 -заключение



Логика предикатов **P(x,y)**

Логика высказываний оперирует простейшими высказываниями, которые могут быть или истинными, или ложными.

В разговорном языке встречаются более сложные повествовательные предложения, истинность которых может меняться при изменении объектов, о которых идет речь.

В логике такие предложения, истинность которых зависит от параметров, обозначают с помощью предикатов.

Предикат с английского переводится как сказуемое.

Определение предиката Р

Формально предикат - функция, аргументами которой могут быть произвольные объекты из некоторого множества, а значения функции "истина" или "ложь".

Предикат можно рассматривать как расширение понятия высказывания.

Структура суждения

Субъект – то, о чем идет речь в суждении (человек, вещь и др.)

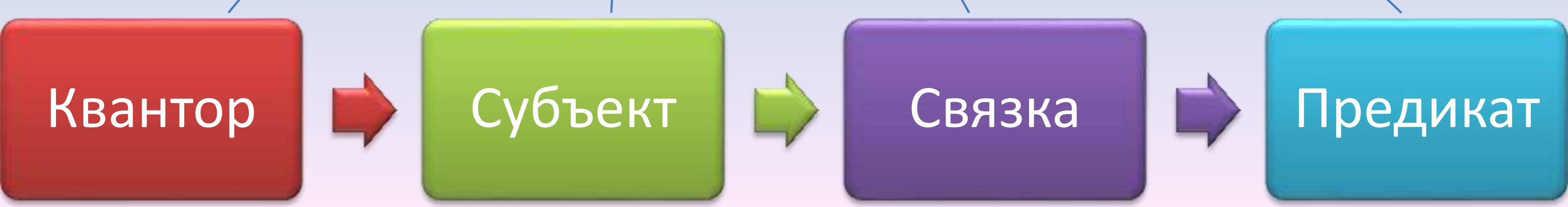
Предикат – то, что говорится о субъекте (сказуемое)

Связка – то, что соединяет субъект и объект (есть, является, это)

Квантор – указатель на объем субъекта (все, некоторые, один)

Субъект- люди, предикат – спортсмены, квантор -некоторые

«Некоторые люди являются спортсменами»

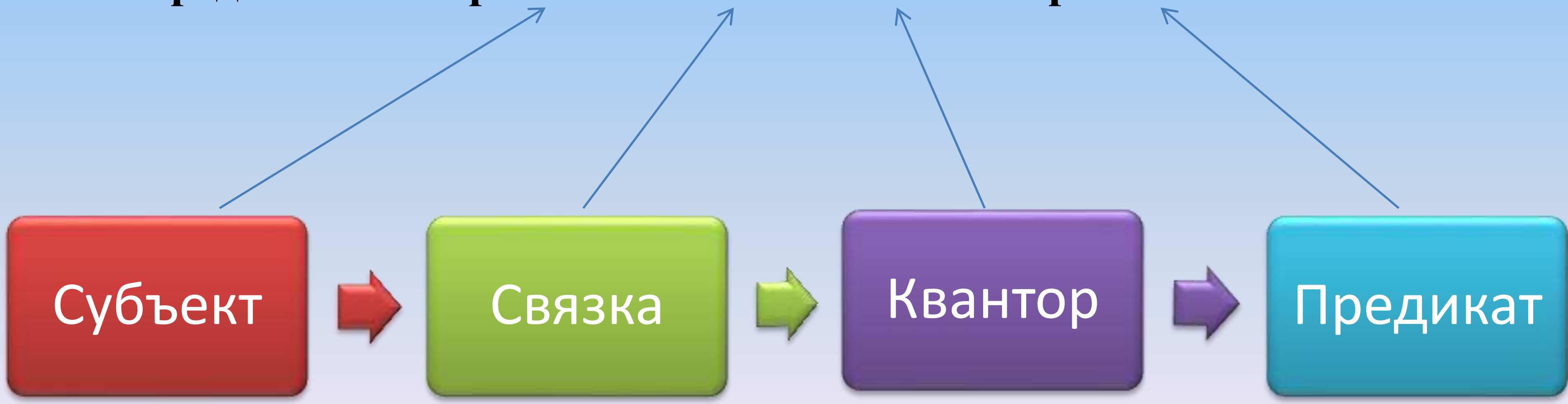


Суждение состоит из: субъекта, предиката, связки и квантора.

Предикат - это функция, аргументами которой могут быть произвольные объекты из некоторого множества, а значения функции «истина» или «ложь». Предикат можно рассматривать как расширение понятия высказывания.

P(x,y)

Предикат : «Хребет X является частью горной системы Y»



Отношения между субъектом и предикатом

Между субъектом и предикатом могут быть различные отношения: равнозначность, пересечение, подчинение, несовместимость. Эти отношения имеют такой же смысл, как и в логике.

Примером предиката может быть:

«Река X впадает в море Y».

Здесь вместо неизвестного **X** может быть любая река, а вместо **Y** любое море. Подстановка вместо **X** названия конкретной реки, а вместо **Y** названия моря превращает предикат в обычное высказывание.

Предикаты

Одноместный предикат P(x) -произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значение из множества {1; 0}.

P(x)=«X <5»

P(y)=«y -простое число»

Высказывания – это нуль-местный предикат. Логическая функция – n-местный предикат.

Двухместный предикат P(x,y) - функция двух переменных x и y, определенная на множестве M=M1xM2 и принимающая значения из множества {1;0}.

Например, **«Хребет X является частью горной системы Y»** или

Q(x, y) – «x=y» - двухместный предикат равенства на множестве RxR=R^2.

N-местный предикат - это функция определенная на наборах из n элементов некоторого множества M, принимающая значения в области True, False.

Множество **M** называется *предметной областью предиката*, а $\mathbf{x_1, x_2, ..x_n}$

Логические операции над предикатами -кванторы

Предикаты при подстановке переменных становятся высказываниями, поэтому с предикатами можно производить логические операции. Для предикатов справедливы все логические операции и две новые операции, специфические: операции навешивания кванторов.

1. **Общности $\forall$ - «для всех»**

2. **Существования $\exists$ - «существует X такое, что...»**

Навешивание квантора

Присоединение квантора с переменной к предикатной формуле называется *навешивание* квантора на переменную x. Переменная при этом называется *связанной* и вместо нее подставлять константы уже нельзя.

Например: **$\forall$x P(x).**

Переменную x в предикате P(x) называют **свободной** (ей можно придавать различные значения), в высказывании же $\forall$x называют **связанной** квантором всеобщности.

Переменная, на которую навешивается квантор называется связанной.

Выражение, на которое навешивается квантор, называется областью действия квантора

$\forall$x P(x)	«Из всякого положения есть выход»
$\exists x \overline{P(x)}$	«Существуют безвыходные положения»

Истинность предиката

Предикат называется *тождественно истинным*, если на всех наборах своих переменных принимает значение 1, *выполнимым,* если на некотором наборе своих переменных принимает значение 1

<table>
<tr><td>$P(X)=x<10$</td><td rowspan="2">ЛОЖЬ</td><td>$P(X)=x<10$</td><td rowspan="2">ИСТИНА</td></tr>
<tr><td>$\forall x\ \ x<10$
Все x
меньше 10</td><td>$\exists x\ \ x<10$
Существуют x,
которые <10</td></tr>
</table>

Истинность предиката

Пусть предикат P(x,y)=«x ≤y» определен на множестве натуральных чисел N

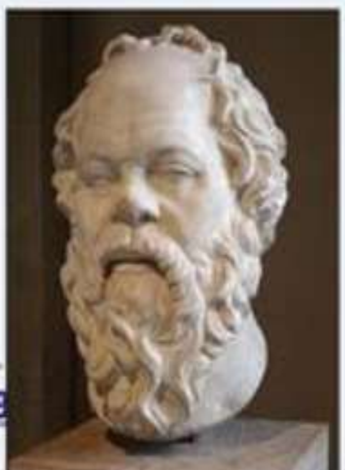
№	Предикатная запись	Предложение	Значение истинности
1.	$\exists x \forall y P(x, y)$	Существует x, который меньше любого y	1
2.	$\exists x \exists y P(x, y)$	Существуют такие x и y, что $x \leq y$	1
3.	$\forall x \forall y P(x, y)$	Для любого x и любого y имеет место $x \leq y$	0

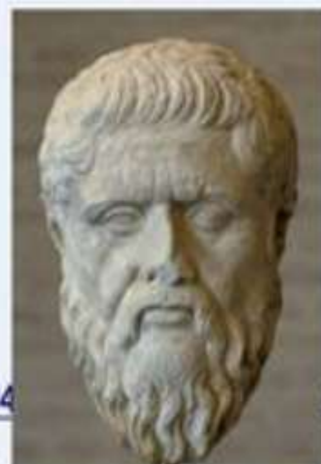
Историческая справка

Софизм (от греч. *sophisma* – уловка, выдумка, головоломка), формально кажущееся правильным, но по существу ложное умозаключение, основанное на преднамеренно неправильном подборе исходных положений.

Парадокс (от греч. *paradoxos* – неожиданный, странный) мнение, рассуждение, резко расходящееся с общепринятыми понятиями.

СОКРАТ **ПЛАТОН** **АРИСТОТЕЛЬ**





469 427 – 34 384 – 322 г.г. д

Логические парадоксы

Парадокс - ситуация (высказывание –расходящееся с общепринятыми суждениями), которая может существовать в реальности, но не имеет логического объяснения.

Парадокс Гегеля: «История учит человека тому, что человек ничему не учится из истории».

Парадокс крокодила: Крокодил украл ребёнка и обещал матери отдать его, если она верно ответит, отдаст ли крокодил ей ребёнка.

Парадокс Петрония: «Ограничивайте себя во всех вещах, даже в ограничении».

Парадокс дней рождения: какая вероятность того, что у двух учеников из одного класса день рождения совпадает? Оказывается — более 50 %, если учеников больше 23.

Квадратура круга: Возможно ли разрезать круг на конечное количество частей и собрать из них квадрат такой же площади?

Логические парадоксы из теории принятия решений

- Парадокс Абилина: бывает, что люди принимают решения, основанные не на том, что они сами хотят, но на том, что они думают, что другие хотят. В результате получается, что каждый делает что-то, что никому на самом деле не нужно.
- Буриданов осёл: как можно совершить рациональный выбор между двумя вещами, имеющими одинаковую ценность?
- Парадокс контроля (*англ.*): человек не может быть свободен от контроля, ибо чтобы быть свободным от контроля, нужно контролировать себя.
- Вилка Мортона: выбор из двух плохих альтернатив («выбор из двух зол»).
- Дилемма заключённого: при некоторых условиях оптимальная стратегия поведения каждого игрока, если каждый игрок исходит из эгоистичных соображений, оказывается проигрышной для группы в целом и для каждого игрока в отдельности.

Парадокс лжеца

Человек произносит фразу:
«Высказывание, которое я сейчас говорю, ложно»
или «Я лгу».
Если его высказывание – истинно, то есть он лжет,
то на самом деле он говорит правду. А если его высказывание – ложно, то значит он должен говорить правду и не говорить ложь.

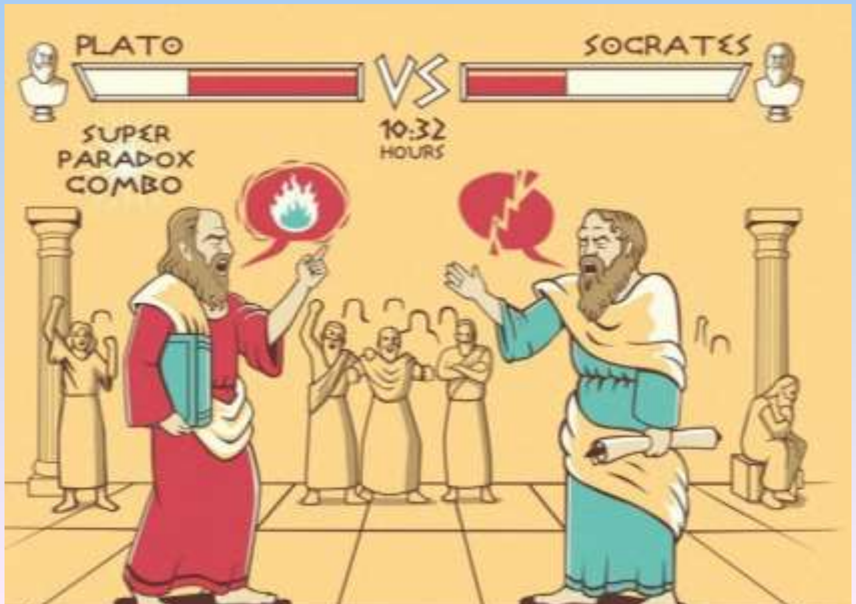
Может ли всемогущий маг создать камень, который не сможет поднять?
Если не может - значит, он не всемогущий. Если может - значит, всё равно не всемогущий, т.к. он не может поднять это камень.

Парадокс лжеца

В средние века была распространена такая формулировка:

«Сказанное Платоном – ложно, говорит Сократ. – То, что сказал Сократ, – истина, говорит Платон». При этом выяснить кто из них лжет, а кто говорит правду в рамках логики высказываний невозможно. Парадокс лжеца, открытый еще в IV в. до нашей эры, остается притягательным для изучения до сих пор. Ему посвящены множество трудов. Нередко он называется «королем логических парадоксов».

-Сократ говорит истину

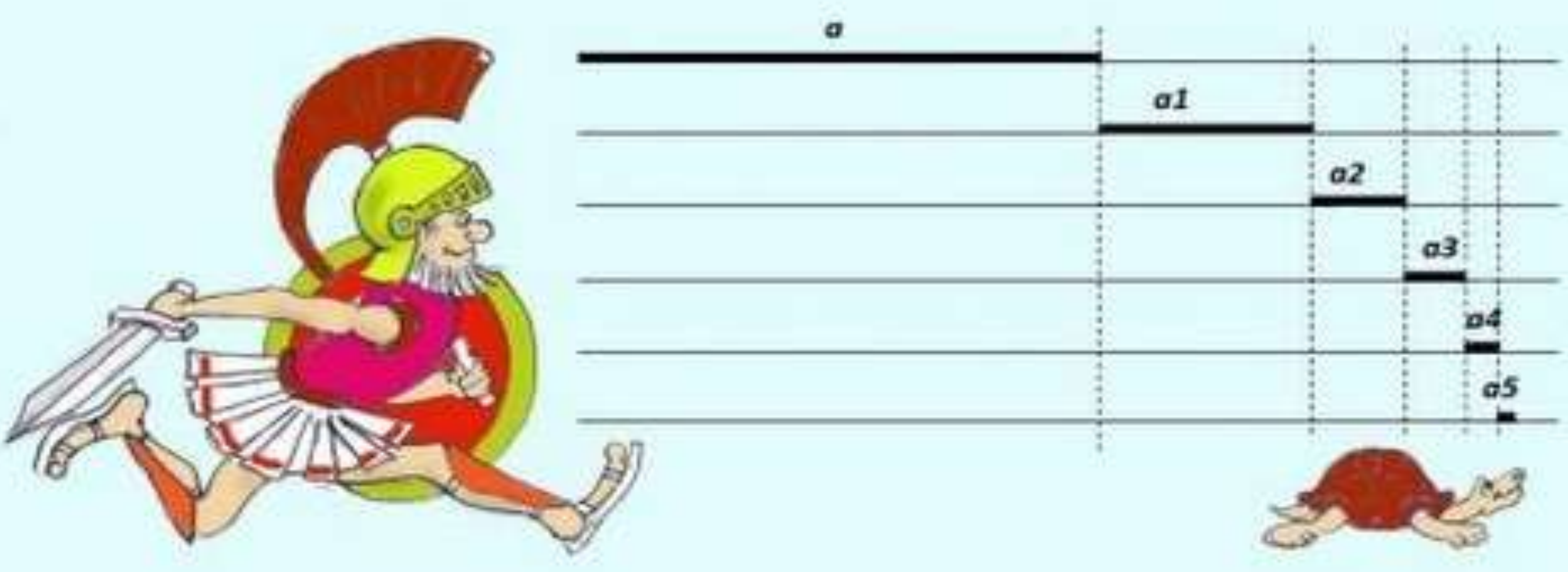


-Платон лжёт

Парадокс Ахиллеса

Быстроногий Ахиллес никогда не догонит неторопливую черепаху, если в начале движения черепаха находится впереди Ахиллеса.

Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.



СОВРЕМЕННЫЙ ПАРАДОКС

Парадокс:

Бесплатная медицина у нас начинается с платных бахил.

А платная медицина — с бесплатных бахил.

ТАВТОЛОГИЯ

- **ТАВТОЛОГИЯ** [греческое — tautologéō — «говорю то же самое»] — термин античной стилистики, обозначающий повторение однозначных или тех же слов.