

Метод наименьших квадратов

Для математического описания статических экспериментальных характеристик технологического процесса используются уравнения полученные методом математической статистики для получения зависимости $Y = f(X)$. Эту зависимость наиболее просто и удобно выразить с использованием многочлена вида:

$$Y(X) = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n, \quad (1)$$

Так как статическая характеристика нелинейная, то для получения уравнения статической характеристики используется полином четвертой степени вида: $Y(X) = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + a_3 \cdot X^3 + a_4 \cdot X^4$, (2)

Коэффициенты полинома (2) определяются из решения системы уравнений полученных с использованием метода наименьших квадратов:

$$\begin{cases} \sum Y = N \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum X + a_2 \cdot \sum X^2 + a_3 \cdot \sum X^3 + a_4 \cdot \sum X^4 \\ \sum XY = a_0 \cdot \sum X + a_1 \cdot \sum X^2 + a_2 \cdot \sum X^3 + a_3 \cdot \sum X^4 + a_4 \cdot \sum X^5 \\ \sum X^2Y = a_0 \cdot \sum X^2 + a_1 \cdot \sum X^3 + a_2 \cdot \sum X^4 + a_3 \cdot \sum X^5 + a_4 \cdot \sum X^6 \\ \sum X^3Y = a_0 \cdot \sum X^3 + a_1 \cdot \sum X^4 + a_2 \cdot \sum X^5 + a_3 \cdot \sum X^6 + a_4 \cdot \sum X^7 \\ \sum X^4Y = a_0 \cdot \sum X^4 + a_1 \cdot \sum X^5 + a_2 \cdot \sum X^6 + a_3 \cdot \sum X^7 + a_4 \cdot \sum X^8 \end{cases}, \quad (3)$$

Расчет коэффициентов уравнения статической характеристики методом наименьших квадратов приведен в таблице ниже.

Решение системы уравнений осуществляется методом Крамера и заключается в определении коэффициентов полинома (2) с помощью определителей, составленных по системе уравнений (3). Данные берутся из таблицы (сумма по столбцам)

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} Y & X & X^2 & X^3 & X^4 \\ XY & X^2 & X^3 & X^4 & X^5 \\ X^2Y & X^3 & X^4 & X^5 & X^6 \\ X^3Y & X^4 & X^5 & X^6 & X^7 \\ X^4Y & X^5 & X^6 & X^7 & X^8 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} N & Y & X^2 & X^3 & X^4 \\ X & XY & X^3 & X^4 & X^5 \\ X^2 & X^2Y & X^4 & X^5 & X^6 \\ X^3 & X^3Y & X^5 & X^6 & X^7 \\ X^4 & X^4Y & X^6 & X^7 & X^8 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} N & X & Y & X^3 & X^4 \\ X & X^2 & XY & X^4 & X^5 \\ X^2 & X^3 & X^2Y & X^5 & X^6 \\ X^3 & X^4 & X^3Y & X^6 & X^7 \\ X^4 & X^5 & X^4Y & X^7 & X^8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} N & X & X^2 & Y & X^4 \\ X & X^2 & X^3 & XY & X^5 \\ X^2 & X^3 & X^4 & X^2Y & X^6 \\ X^3 & X^4 & X^5 & X^3Y & X^7 \\ X^4 & X^5 & X^6 & X^4Y & X^8 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} N & X & X^2 & X^3 & Y \\ X & X^2 & X^3 & X^4 & XY \\ X^2 & X^3 & X^4 & X^5 & X^2Y \\ X^3 & X^4 & X^5 & X^6 & X^3Y \\ X^4 & X^5 & X^6 & X^7 & X^4Y \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} N & X & X^2 & X^3 & X^4 \\ X & X^2 & X^3 & X^4 & X^5 \\ X^2 & X^3 & X^4 & X^5 & X^6 \\ X^3 & X^4 & X^5 & X^6 & X^7 \\ X^4 & X^5 & X^6 & X^7 & X^8 \end{vmatrix}$$

Коэффициенты полинома (2): $a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$; $a_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}$.

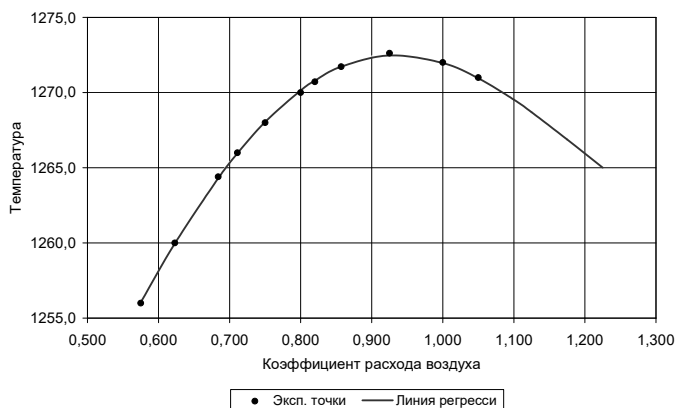
Коэффициенты уравнения:

$$a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1235,43; \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -135,03; \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 565,069; \quad a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -563,74; \quad a_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 170,227$$

Уравнение статической характеристики будет иметь следующий вид:

$$Y(X) = 1235,43 - 135,03 \cdot X + 565,069 \cdot X^2 - 563,74 \cdot X^3 + 170,227 \cdot X^4$$

Полученная статическая характеристика приведена на рисунке:



Расчет коэффициентов уравнения статической характеристики

N	X	Y	X ²	X ³	X ⁴	X ⁵	X ⁶	X ⁷	X ⁸	XY	X ² Y	X ³ Y	X ⁴ Y	Yp
1	0,575	1256,0	0,331	0,190	0,109	0,063	0,036	0,021	0,012	722,2	415,3	238,78	137,3	1256
2	0,623	1260,0	0,388	0,242	0,151	0,094	0,058	0,036	0,023	785	489	304,67	189,81	1260
3	0,684	1264,4	0,468	0,320	0,219	0,150	0,102	0,070	0,048	864,8	591,6	404,63	276,76	1264
4	0,711	1266,0	0,506	0,359	0,256	0,182	0,129	0,092	0,065	900,1	640	455,03	323,53	1266
5	0,750	1268,0	0,563	0,422	0,316	0,237	0,178	0,133	0,100	951	713,3	534,94	401,2	1268
6	0,800	1270,0	0,640	0,512	0,410	0,328	0,262	0,210	0,168	1016	812,8	650,24	520,19	1270
7	0,820	1270,7	0,672	0,551	0,452	0,371	0,304	0,249	0,204	1042	854,4	700,63	574,52	1271
8	0,857	1271,7	0,734	0,629	0,539	0,462	0,396	0,340	0,291	1090	934	800,45	685,99	1272
9	0,925	1272,6	0,856	0,791	0,732	0,677	0,626	0,579	0,536	1177	1089	1007,2	931,68	1272
10	1,000	1272,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1272	1272	1272	1272	1272
11	1,050	1271,0	1,103	1,158	1,216	1,276	1,340	1,407	1,477	1335	1401	1471,3	1544,9	1271
12	1,100	1269,5	1,210	1,331	1,464	1,611	1,772	1,949	2,144	1396	1536	1689,7	1858,7	1270
13	1,125	1268,5	1,266	1,424	1,602	1,802	2,027	2,281	2,566	1427	1605	1806,1	2031,9	1269
14	1,175	1267,0	1,381	1,622	1,906	2,240	2,632	3,092	3,633	1489	1749	2055,4	2415,1	1267
15	1,225	1265,0	1,501	1,838	2,252	2,759	3,379	4,140	5,071	1550	1898	2325,4	2848,6	1265
Σ	13,420	19012,5	12,616	12,390	12,623	13,250	14,243	15,599	17,338	17017	16002	15717	16012	

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 19012,5 & 13,420 & 12,616 & 12,390 & 12,623 \\ 17017 & 12,616 & 12,390 & 12,623 & 13,250 \\ 16002 & 12,390 & 12,623 & 13,250 & 14,243 \\ 15717 & 12,623 & 13,250 & 14,243 & 15,599 \\ 16012 & 13,250 & 14,243 & 15,599 & 17,338 \end{vmatrix} = 2E-06$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 15 & 13,42 & 12,616 & 19012,5 & 12,623 \\ 13,42 & 12,62 & 12,390 & 17016,6 & 13,250 \\ 12,62 & 12,39 & 12,623 & 16001,6 & 14,243 \\ 12,39 & 12,62 & 13,250 & 15716,5 & 15,599 \\ 12,62 & 13,25 & 14,243 & 16012,1 & 17,338 \end{vmatrix} = -9E-07$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 15 & 19012,5 & 12,616 & 12,390 & 12,623 \\ 13,420 & 17016,6 & 12,390 & 12,623 & 13,250 \\ 12,616 & 16001,6 & 12,623 & 13,250 & 14,243 \\ 12,390 & 15716,5 & 13,250 & 14,243 & 15,599 \\ 12,623 & 16012,1 & 14,243 & 15,599 & 17,338 \end{vmatrix} = -2E-07$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 15 & 13,42 & 12,6165 & 12,390 & 19012,5 \\ 13,42 & 12,62 & 12,3904 & 12,623 & 17016,6 \\ 12,62 & 12,39 & 12,6234 & 13,250 & 16001,6 \\ 12,39 & 12,62 & 13,2504 & 14,243 & 15716,5 \\ 12,62 & 13,25 & 14,2427 & 15,599 & 16012,1 \end{vmatrix} = 3E-07$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 15 & 13,420 & 19012,5 & 12,390 & 12,623 \\ 13,42 & 12,616 & 17016,6 & 12,623 & 13,250 \\ 12,62 & 12,390 & 16001,6 & 13,250 & 14,243 \\ 12,39 & 12,623 & 15716,5 & 14,243 & 15,599 \\ 12,62 & 13,250 & 16012,1 & 15,599 & 17,338 \end{vmatrix} = 9E-07$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 13,42 & 12,6165 & 12,39 & 12,623 \\ 13,42 & 12,62 & 12,3904 & 12,62 & 13,250 \\ 12,62 & 12,39 & 12,6234 & 13,25 & 14,243 \\ 12,39 & 12,62 & 13,2504 & 14,24 & 15,599 \\ 12,62 & 13,25 & 14,2427 & 15,6 & 17,338 \end{vmatrix} = 2E-09$$

Пример 2. Получить уравнение линии статической характеристики при изготовлении пластиковой емкости. Где существует обратно пропорциональная зависимость между давлением сжатого воздуха и толщиной стенки формуемого изделия.

$Y(X) = a + bX$ - уравнение линии регрессии.

Экспериментальные данные

X	Эксп. точки	X ²	XY	Линия регрессии
8,0	4,83	64,00	38,64	5,049
8,7	4,12	75,86	35,89	4,00743
9,2	3,45	84,27	31,67	3,31794
9,5	2,86	90,25	27,17	2,8485
10,0	1,83	100,00	18,30	2,115
8,0	4,50	64,00	36,00	5,049
8,5	4,10	73,02	35,03	4,249485
9,2	3,40	83,72	31,11	3,36195
9,6	2,81	92,35	27,00	2,68713
10,6	1,96	111,51	20,70	1,29348
91,3	33,9	839,0	301,5	

Система уравнений для расчета коэффициентов уравнения линии регрессии:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = na + b \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i X_i = a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Имеем следующее: $33,9 = 10 \cdot a + 91,3 \cdot b$

$$301,5 = 91,3 \cdot a + 839 \cdot b$$

Из (2): $b = \frac{301,5 - 91,3 \cdot a}{839}$

Тогда получим: $33,9 = 10 \cdot a + 91,3 \cdot \frac{301,5 - 91,3 \cdot a}{839}$

$$33,9 = 10 \cdot a + 32,809 - 9,935 \cdot a$$

$$a = \frac{1,091}{0,065} = 16,785 ; b = \frac{301,5 - 91,3 \cdot a}{839} = \frac{301,5 - 91,3 \cdot 16,785}{839} = -1,467$$

$$Y(X) = 16,785 - 1,467 \cdot X$$

Статическая характеристика

